HM 4 ZÜ Blatt 9

Notiztitel 19.06.2008

- nächste Woche 26.6.08
  ZÜ entfällt wegen IKOM

---

28. Lsg von $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (*), $u(x,t)$

Koordinatentr. $v = x + ct$, $z = x - vt$

$U(v,z)$. $u(x,y) = U(v,z) = U(x+ct, x-ct)$

$u_t(x,t) = \frac{d}{dt} U(x+ct, x-ct) = U_v(x+ct, x-ct)c + U_z(x+ct, x-ct)(-c)$

$u_{tt}(x,t) = U_{vv}(x+ct, x-ct)c^2 + U_{vz}(x+ct, x-ct)\cdot(-c^2)$

$+ U_{zv}(x+ct, x-ct)\cdot(-c^2) + U_{zz}(x+ct, x-ct)c^2$

$= c^2 U_{vv} - 2c^2 U_{vz} + c^2 U_{zz}$

$u_x(x,t) = \frac{d}{dx} U(x+ct, x-ct) = U_v + U_z$

$u_{xx}(x,t) = U_{vv} + U_{vz} + U_{zv} + U_{zz} = U_{vv} + 2U_{vz} + U_{zz}$

$0 \overset{!}{=} u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2(U_{vv} - 2U_{vz} + U_{zz}) - c^2(U_{vv} + 2U_{vz} + U_{zz})$

$= -4c^2 U_{vz}$

Wellengleichung in (v,z) Koordinaten:

$$U_{vz} = 0 \qquad (**)$$

(b) Lsgn von $(**)$: Lsgn U_v von $(U_v)_z = 0$

$\Rightarrow \quad U_v(v,z) = c(v)$ mit beliebiger Fkt c

$\Rightarrow \quad U(v,z) = C(v) + d(z)$, C Stammfkt von c
d beliebige Fkt.

Insgesamt: U Lsg von $(**)$ $\Rightarrow$ Es gibt C^2 Fkt $C(v), d(z)$
s.d. $U(v,z) = C(v) + d(z)$

$\Rightarrow$ Lsgn von $(*)$

$$u(x,t) = U(x+ct, x-ct) = C(x+ct) + d(x-ct)$$

(c) $(*)$ mit Anfangsbed: $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$

Zunächst: $u_t(x,t) = C'(x+ct)c + d'(x-ct)(-c)$

$$f(x) = u(x,0) = C(x) + d(x) \qquad (1)$$

$$0 = u_t(x,0) = c\left(C'(x) - d'(x)\right) \qquad (2)$$

Aus (2) folgt $d(x) = C(x) + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$

Aus (1): $f(x) = 2C(x) + c_1$ oder $C(x) = \frac{1}{2}(f(x) - c_1)$

$$d(x) = \frac{1}{2}(f(x) + c_1)$$

Insg.: $u(x,t) = C(x+ct) + d(x-ct) = \underline{\frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right)}$

(d) Anfangsbed.: $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$

$$f(x) = C(x) + d(x) \qquad (1)$$

$$g(x) = c\left(C'(x) - d'(x)\right) \qquad (2)$$

(2) $\Rightarrow$ $G(x) = c\left(C(x) - d(x)\right)$, wobei $G(x)$ eine Stammfkt von $g(x)$ ist

$$d(x) = C(x) - \frac{1}{c} G(x)$$

in (1): $f(x) = 2C(x) - \frac{1}{c} G(x)$

$$C(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + \frac{1}{c} G(x)\right)$$

$$d(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{1}{c} G(x)\right)$$

daraus

$$u(x,t) = C(x+ct) + d(x-ct) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(f + \frac{1}{c} G\right)(x+ct) + \frac{1}{2}\left(f - \frac{1}{c} G\right)(x-ct).$$