HM4 ZÜ 3

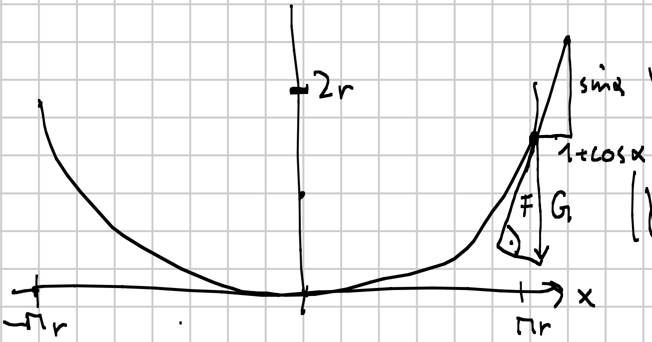
Notiztitel 08.05.2008

Klausureinsicht morgen 15:30 - 16:30
statt 14 - 15 Uhr

Pfingstwoche: keine Tutorübungen

---

11. Zykloide $Z = \gamma([-\pi, \pi])$ $\quad \gamma(\alpha) = r\begin{pmatrix} \alpha + \sin\alpha \\ 1 - \cos\alpha \end{pmatrix}$ $r > 0$



$$\gamma'(\alpha) = r\begin{pmatrix} 1 + \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$|\gamma'(\alpha)| = r\sqrt{(1+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = r\sqrt{2(1+\cos\alpha)} = 2r\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$s(\alpha) = \int_0^\alpha |\gamma'(\alpha)|\, d\alpha = \int_0^\alpha 2r\cos\frac{\alpha}{2}\, d\alpha = 4r\sin\frac{\alpha}{2} \in [-4r, +4r]$$

Umkehrfkt.: $\alpha(s) = 2\arcsin\frac{s}{4r}$

Tangentiale Kraft für $\alpha \in [-\pi, \pi]$

$$\frac{F}{G} = \frac{r\sin\alpha}{|\gamma'(\alpha)|} = \frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2r\cos\frac{\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2}$$

Bewegungsgl.: $S(t)$

$$m\ddot{S} = -F = -mg\sin\frac{\alpha}{2} = -\frac{mg}{4r}\underbrace{4r\sin\frac{\alpha}{2}}_{S(t) = s(\alpha)}$$

$$\ddot{S} = -\frac{g}{4r}S$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{4r}}$. Lsgn: $S(t) = R\cos(\omega_0 t + \varphi)$, $R \geq 0$
Kreisfrequenz
$= c_1 \cos\omega_0 t + c_2 \sin\omega_0 t$

(b) $r = 1\,[m]$, $g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right] \approx \pi^2$

f Schwingungsfrequenz $\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}}$

$\sin\omega_0 t = 0$, $\omega_0 T = 2\pi$, $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

$$f = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{r\cdot\pi^2}} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{s}\right]$$

(c) DGL.
$$\ddot{S} = -\mu\dot{S} - \frac{g}{4r}S$$

char Pol. $p(\lambda) = \lambda^2 + \mu\lambda + \frac{g}{4r}$

aperiodischer Grenzfall: doppelte Nullst. falls Diskriminante
$$D = \mu^2 - \frac{g}{r} = 0, \quad \mu = \sqrt{\frac{g}{r}} \approx \pi \approx 3{,}14\left[\frac{1}{s}\right]$$

Gedämpfter senkrechter Fall:
$$\ddot{y} = -\mu\dot{y} - g$$

stationär: $\ddot{y} = 0 \Leftrightarrow \dot{y} = -\frac{g}{\mu} \approx \pi \approx 3.14\left[\frac{m}{s}\right]$

(d) periodische Anregung:
$$\ddot{S} + \omega_0^2 S = a\cos\omega t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{4r}}$$

Ansatz: $S(t) = A\cos\omega t$. Führt auf $-A\omega^2 + A\omega_0^2 = a$,

bzw. $A = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}$ $\qquad \underline{\omega \neq \omega_0}$

Lsg $S(t) = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$

$\omega < \omega_0$: gleichphasig

$\omega > \omega_0$: gegenphasig

Lsg auf ganz $\mathbb{R}$ $|\omega_0^2 - \omega^2| < \frac{a}{4r}$

$\omega = \omega_0$. Ansatz: $z_+(t) = A t e^{i\omega t}$ $z_+'(t) = A(1+i\omega t)e^{i\omega t}$

$\underline{z_+''(t) = A(2i\omega - \omega^2 t)e^{i\omega t}}$

$z_+''(t) + \omega^2 z_+(t) = A \cdot 2i\omega e^{i\omega t} \overset{!}{=} e^{i\omega t}$

$A = \frac{1}{2i\omega}$

$z_-(t) = \frac{1}{-2i\omega} t e^{-i\omega t}$ part Lsg. von $\ddot{S} + \omega^2 S = e^{-i\omega t}$

Lsg von $\ddot{S} + \omega^2 S = a \cos \omega t$:

$$x(t) = \frac{a}{2} \left(z_+(t) + z_-(t) \right) = \frac{at}{2\omega} \sin \omega t.$$