Superpositionsprinzip: Spezialfall

Löst $\vec{u}_1$ das System

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{b}_1(t)$$

und $\vec{u}_2$ das System

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x},$$

so löst $\vec{u}_1 + c\vec{u}_2$ mit $c \in \mathbb{R}$ das System

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{b}_1(t)$$

Superpositionsprinzip: Spezialfall

Löst $\vec{u}_1$ das System

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t)$$

und $\vec{u}_2$ das System

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t),$$

so löst $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ das System

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$$

13.6.3 Superpositionsprinzip: Folgerung

Geg.: lin. Dgl-System

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t)$$

Allgemeine Lösung:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_p(t) + \vec{x}_h(t),$$

wobei:
$\vec{x}_p(t)$ ... **eine** partikuläre Lösung des Systems
$\vec{x}_h(t)$ ... die allgemeine (und vollständige) Lösung des zugeh. homogenen Systems

13.6.4 Superpositionsprinzip bei Komplexifizierung:

Löst $\vec{u}_1$ das System

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{b}_1(t)$$

und $\vec{u}_2$ das System

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{b}_2(t),$$

mit reellem $A(t)$, $\vec{b}_1(t)$ und $\vec{b}_2(t)$, so löst $\vec{u}_1 + i\vec{u}_2$ das System

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{b}_1(t) + i\vec{b}_2(t)$$

13.6.5 Lösungsmenge eines homogenen lin. Dgl-Systems

Geg.: lin. Dgl-System

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$$

Die Nullfunktion $\vec{o}$ ist Lösung.
Sind $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ Lösungen, so auch $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Die Lösungsmenge ist ein Vektorraum.

ohne Beweis: Der Lösungsraum hat die Dimension n (= Zeilenzahl von $A(t)$ = Spaltenzahl von $A(t)$).

ohne Beweis: Sind $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ Lösungen, so sind $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ linear unabhängig, also eine Basis des Lösungsraums, wenn gilt: Für ein t ist die **Wronski- Determinante**

$$W(t) := \det(\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_n(t))$$

ungleich Null.
(Dann ist $W(t) \neq 0 \forall t$.)

13.7 Eine Anwendung auf homogene lineare Dgln n-ter Ordnung

Die Fkt y ist eine Lösung der Dgl

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots$$

$$+a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

genau dann, wenn gilt:

(Dabei wieder o.E. $a_n(x) = 1 \ \forall x$.)

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$\text{mit } \vec{y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt der

Satz: Sind y_1, y_2, ..., y_n Lösungen einer homogenen linearen Dgl n-ter Ordnung, so sind y_1, y_2, ..., y_n linear unabhängige Fkten genau dann, wenn gilt:

$$W(t) :=$$

$$\det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{n-1}' & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)} & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \neq 0$$

für ein t. (Dann ist $W(t) \neq 0 \ \forall t$.)

Achtung! Die Voraussetzung "y_1, y_2, ..., y_n Lösungen einer homogenen linearen Dgl n-ter Ordnung" ist wesentlich.

Warum?

Sind y_1, y_2, ..., y_n (nicht notwendig Lösungen einer homogenen linearen Dgl) l. a., so gibt es $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n \setminus (0, 0, \dots, 0)$, so dass gilt

$$y_1 c_1 + y_2 c_2 + \ldots + y_n c_n = 0 \quad \forall t.$$

Daraus folgt:

$$y_1' c_1 + y_2' c_2 + \ldots + y_n' c_n = 0 \quad \forall t.$$

$$\ldots$$

$$y_1^{(n-1)} c_1 + y_2^{(n-1)} c_2 + \ldots + y_n^{(n-1)} c_n = 0 \quad \forall t.$$

Daraus folgt:

$$W(t) :=$$

$$\det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{n-1}' & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)} & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = 0$$

für alle t.

Es gilt also: $W(t) \neq 0$ für ein $t \Rightarrow$

$y_1, y_2, \dots, y_n$ l.u.

Aber daraus folgt **nicht**, dass $W(t) \neq 0 \; \forall t$.

Bsp.: Die Funktionen $y_1(t) := t$ und $y_2(t) := t^2$ sind l.u.,
denn aus $c_1 t + c_2 t^2 = 0 \quad \forall t$ folgt:
$c_1 = c_2 = 0$.
Aber für

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{pmatrix} = t^2$$

gilt:

$$W(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0;$$

also ist **nicht** $W(t) \neq 0$ für alle t.