Bsp.:

$$x \cdot u_x + y \cdot u_y + u = x$$

Gesucht sind alle Lösungen $u(x, y)$, die für $x > 0$ definiert sind.
Die zugehörige Rumpf-Dgl haben wir schon gelöst und als eine Lösung gefunden:

$$u = \frac{y}{x}.$$

Wir wählen daher

$$\xi := \frac{y}{x}, \qquad \eta := x$$

als neue Variablen. Mit $u(x, y) =: U(\xi, \eta)$ ist dann

$$x \cdot u_x + y \cdot u_y + u =$$

$$= x \cdot (U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x) + y \cdot (U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y) + U =$$

$$= U_\xi \cdot (x\xi_x + y\xi_y) + U_\eta \cdot (x\eta_x + y\eta_y) + U$$

Weil ξ eine Lösung der Rumpf-Dgl ist, bleibt also nur noch stehen:

$$x \cdot u_x + y \cdot u_y + u =$$

$$= U_\eta \cdot (x\eta_x + y\eta_y) + U$$

Wegen $\eta_x = 1, \eta_y = 0$ und

$$x = \eta, \qquad y = \xi\eta$$

lautet die transformierte Dgl:

$$U_\eta \cdot (\eta + 0) + U = \eta.$$

Das ist eine gew. Dgl, eine lineare Dgl 1. Ordnung, die man konventionell lösen kann. Kürzer:

$$U_\eta \cdot \eta + U = \eta$$

$$(U\eta)_\eta = \eta \Rightarrow$$

$$U\eta = \frac{1}{2}\eta^2 + \phi(\xi)$$

$$U = \frac{\eta}{2} + \frac{\phi(\xi)}{\eta}$$

$$u = \frac{x}{2} + \frac{\phi(\frac{y}{x})}{x}$$

Dabei ist ϕ eine beliebige C^1-Funktion einer Variablen, in die man $\frac{y}{x}$ einsetzt.

In ϕ stecken die Integrationskonstanten.

12 Fourier-Reihen

Zur Behandlung der Wärmeleitungsgleichung erfand Joseph Fourier (1768 - 1830) eine damals neue Methode mit trigonometrischen Reihen.

12.1 Trigonometrische Polynome

Ein **trigonometrisches Polynom** ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gestalt

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t).$$

Dabei ist $N \in \mathbb{N}$, $a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ für $1 \leq n \leq N$.

a_n, b_n ... **Koeffizienten** von f

N ... **Grad** von f, falls $(a_N, b_N) \neq (0,0)$.

Der erste Summand $s_0 := \frac{a_0}{2}$ von f ist konstant.
Der zweite Summand $s_1(t) := a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$ von f hat die Periode $\frac{2\pi}{\omega}$.
Er ist $\frac{2\pi}{\omega}$-periodisch.

Was heißt das?

$$s_1(t + \frac{2\pi}{\omega}) = s_1(t) \ \forall \ t \in \mathbb{R}$$

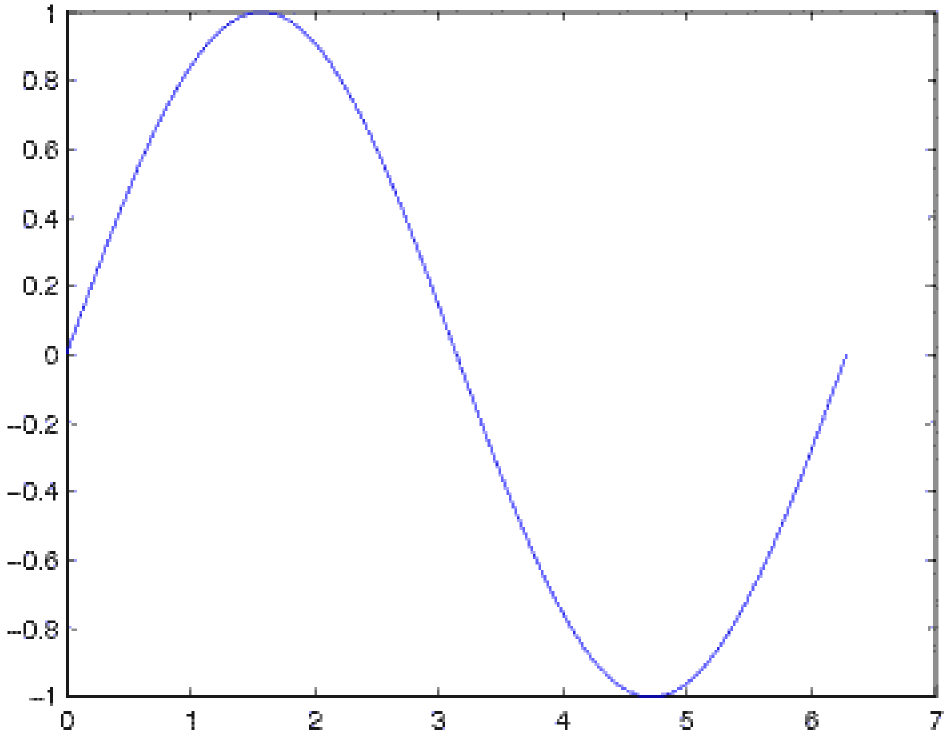
Daraus folgt:

$$s_1(t + k \cdot \frac{2\pi}{\omega}) = s_1(t) \ \forall \ t \in \mathbb{R} \ \forall \ k \in \mathbb{Z}$$

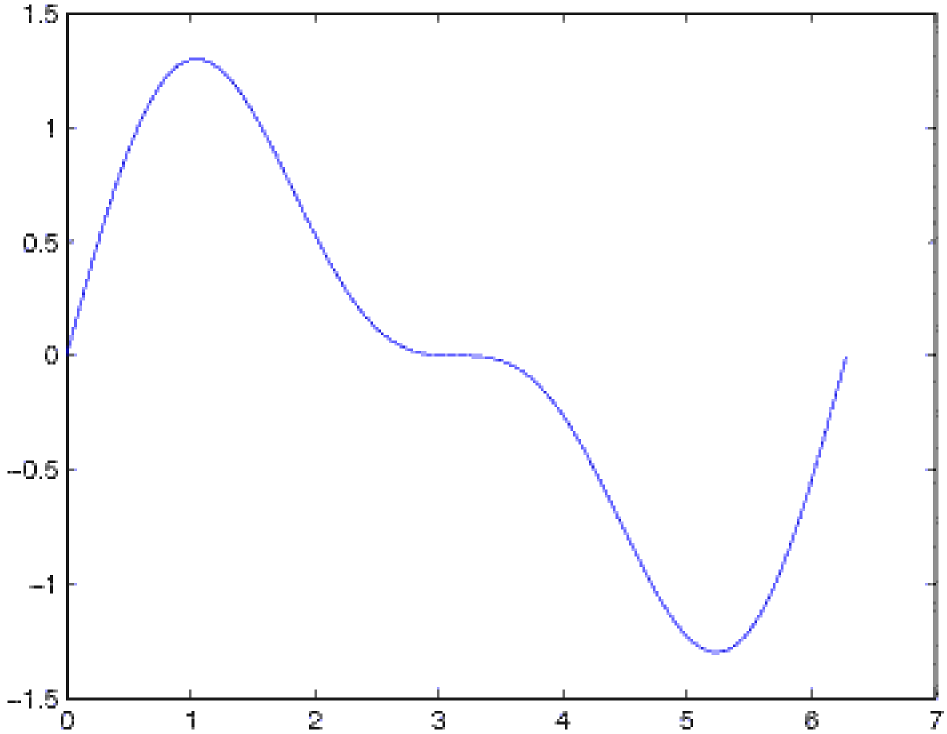
Der dritte Summand $a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t$ von f hat die Periode $\frac{2\pi}{2\omega}$.
Der vierte Summand $a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t$ von f hat die Periode $\frac{2\pi}{3\omega}$.
$\vdots$
Alle Summanden von f haben die gemeinsame Periode $\frac{2\pi}{\omega}$.

Die Funktion f ist $\frac{2\pi}{\omega}$-periodisch.

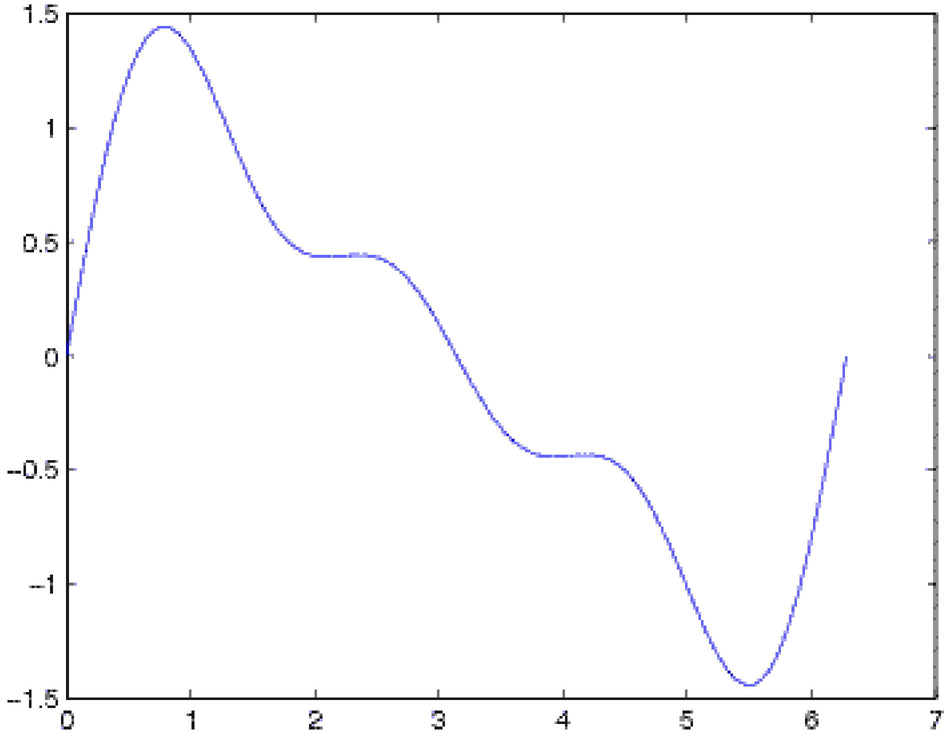
$f(x) = \sin(x)$:



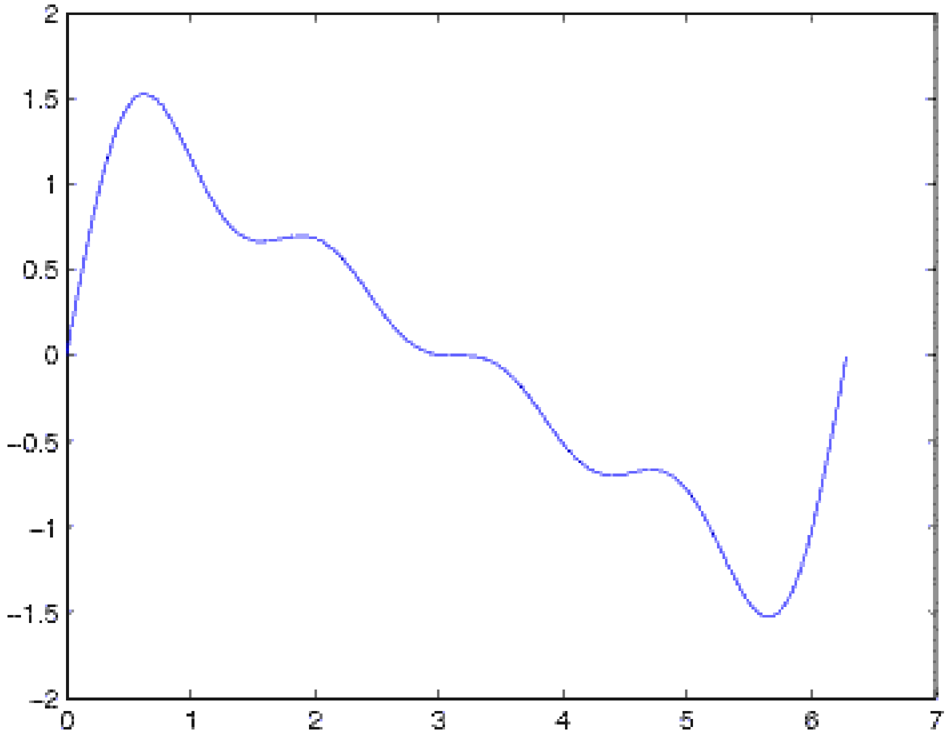
$f(x) = \sin(x) + \frac{\sin 2x}{2}$:



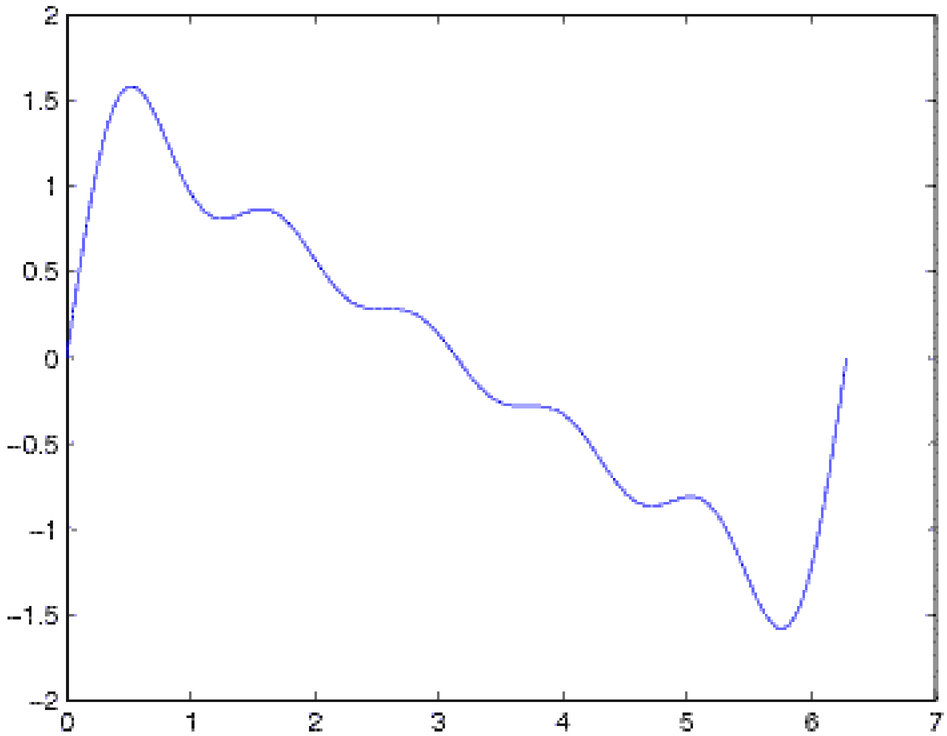
$$f(x) = \sin(x) + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3}:$$



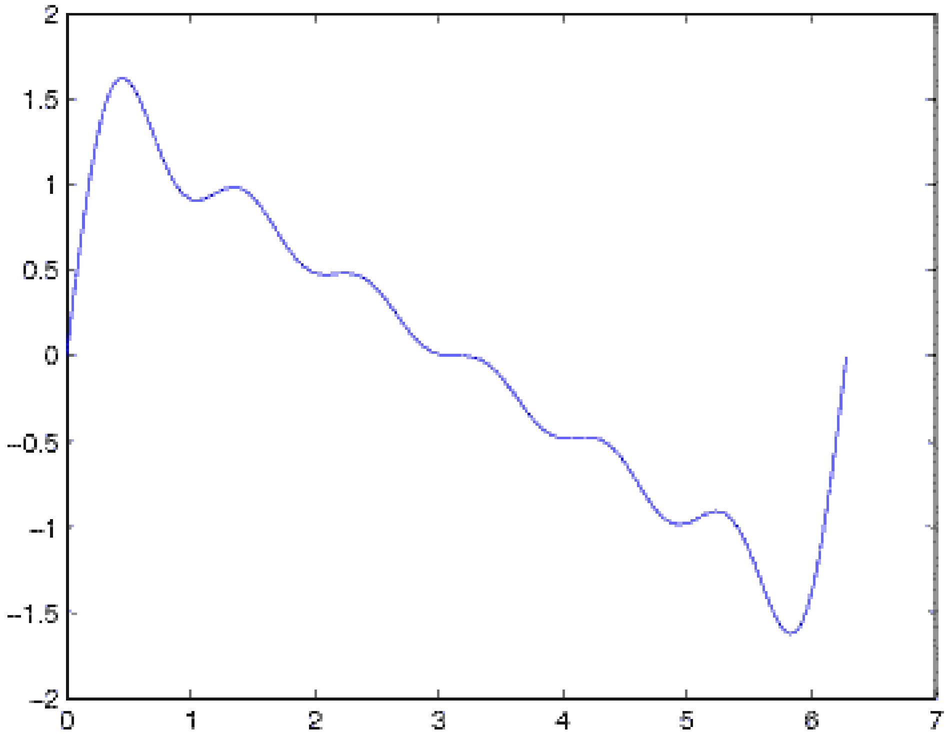
$$f(x) = \sin(x) + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4}:$$



$$f(x) = \sin(x) + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5}:$$



$$f(x) = \sin(x) + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 6x}{6}:$$



Der Graph scheint einer "Sägezahnkurve" immer ähnlicher zu werden.

Die Funktionen $\cos k\omega t$ und $\sin k\omega t$ sind $\frac{2\pi}{k\omega}$-periodisch.
Die Funktionen $\cos kt$ und $\sin kt$ sind $\frac{2\pi}{k}$-periodisch.
Aus den Graphen der einfacheren Funktionen $\cos kt$ und $\sin kt$ erhält man die Graphen von $\cos k\omega t$ und $\sin k\omega t$ durch Strecken in t-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{\omega}$.

Es reicht "im Prinzip", den Faktor ω für theoretische Überlegungen wegzulassen, und die Ergebnisse hernach durch Streckung der t-Achse zu transformieren.

12.1.1 Einige Relationen:

(Beweis in den Übungen)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cdot \sin(nx) dx = 0 \quad \forall k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cdot \sin(nx) dx = 0 \quad \forall k, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } k \neq \pm n.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cdot \cos(nx) dx = 0 \quad \forall k, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } k \neq \pm n.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) dx = \pi \quad (k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \; dx = 2\pi \qquad (k = 0)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} 0 \; dx = 0 \qquad (k = 0)$$

12.1.2 Eine Skalarprodukt-Sprechweise

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$ ein abgeschlossenes Intervall.
Die Abbildung $<, >$, die für je zwei auf $[a, b]$ stetige reelle Funktionen f, $g \in C([a, b])$ definiert ist durch

$$< f, g > := \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

heißt ein **Skalarprodukt** auf dem Raum $C([a, b])$ der auf $[a, b]$ stetigen reellen Funktionen.

$$\|f\| := \sqrt{< f, f >}$$

heißt die **Norm** von f.
Zwei auf $[a, b]$ stetige reelle Funktionen f, g heißen zueinander **orthogonal**, wenn gilt:
$< f, g > = 0$.
Wir haben gesehen: Die Funktionen $\cos kx$, $\sin nx$, $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$ bilden ein **Orthogonalsystem** von Funktionen.
Jede dieser Funktionen (außer $\cos(0 \cdot x)$) hat die Norm $\sqrt{\pi}$. Die Funktion $\cos(0 \cdot x)$ hat die Norm $\sqrt{2\pi}$.
Die Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos kx$, $(k \in \mathbb{N})$ und $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$ bilden ein **Orthonormalsystem** von Funktionen.

12.1.3 Eigenschaften trigonometrischer Polynome:

Nullstellensatz: Ein trigonometrisches Polynom vom Grad N mit der (kleinsten!) Periode T hat in $[t, t+T[$ mit $t \in \mathbb{R}$ höchstens $2N$ Nullstellen. (Doppelt soviele wie ein Polynom vom Grad N in $\mathbb{R}$.)

Satz vom Koeffizientenvergleich: Ist $f(t) = g(t) \ \forall\ t \in \mathbb{R}$ für zwei trigonometrische Polynome f und g mit

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

$$g(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (c_n \cos n\omega t + d_n \sin n\omega t),$$

so ist $a_n = c_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $b_n = d_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Bem.: Der Satz vom Koeffizientenvergleich folgt aus der (auf den ersten Blick) schwächeren Aussage: Ist $f(t) = 0 \ \forall\ t \in \mathbb{R}$ für das trigonometrische Polynom

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

so ist $a_n = 0 = b_k \ \forall\ n \in \mathbb{N}_0 \ \forall\ k \in \mathbb{N}$.

Formeln von Euler/Fourier:
Für das trigonometrische Polynom

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

gilt:

$$a_k = \frac{\omega}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \cdot \cos(k\omega t) dt \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N$$

$$b_k = \frac{\omega}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \cdot \sin(k\omega t) dt \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N$$

(Gilt das auch für b_0?)

Wie sieht man das ein?
Das Skalarprodukt (z.B.) $< f(t), \sin k\omega t >$ ist wegen der Orthogonalitätsrelationen gleich

$$b_k \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2 k\omega t \; dt = b_k \cdot \frac{\pi}{\omega}$$

und wegen der Definition des Skalarprodukts gleich

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \cdot \sin(k\omega t) dt$$

12.2 Trigonometrische Reihen

Sinnvoll sei der folgende Ausdruck:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x +$$

$$+ a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \ldots =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \qquad (*).$$

Dann heißt (*) eine **trigonometrische Reihe**. (Was sinnvoll heißt, legen wir bei einzelnen Aussagen fest.)

Die N**-te Partialsumme** $S_N(t)$ **von (*)** ist der Ausdruck

$$S_N(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \qquad (**).$$

Existiert

$$\lim_{N \to \infty} S_N(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist f eine 2π-periodische Funktion.

Achtung: Dieser Grenzwert braucht für kein $t \in \mathbb{R}$ zu existieren.