11.2.9 Lineare und quasilineare pDgln zweiter Ordnung

Wellengleichung, Wärmeleitungsgleichung und Potentialgleichung sind Beispiele von lin. pDgln zweiter Ordnung.

Allgemeine Gestalt einer **linearen pDgl zweiter Ordnung**:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_j(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_j} +$$

$$+ c(x_1, \ldots, x_n) u(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

Die Gleichung ist **homogen**, wenn f die Nullfunktion ist.

Zur Abkürzung: $(x_1, \ldots, x_n) =: x$,
wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind.

Die Matrix $A(x) := a_{ij}(x)$ ist symmetrisch (o.E.) $\Longrightarrow$
$A(x)$ besitzt eine Basis aus Eigenvektoren und n Eigenwerte,
die im allgemeinen von x abhängen.

Zu der Matrix $A(x)$ gehört die quadratische Form $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{p} \mapsto \vec{p}^T A(x)\vec{p}$.

Die lineare pDgl 2. Ordnung heißt **im Punkt** x

a) elliptisch, wenn alle Eigenwerte von $A(x)$ nicht verschwinden und gleiches Vorzeichen haben;

b) parabolisch, wenn mindestens ein Eigenwert von $A(x)$ gleich Null ist;

c) hyperbolisch, wenn alle Eigenwerte von $A(x)$ nicht verschwinden und alle bis auf genau einen gleiches Vorzeichen haben.

Ist die pDgl nicht in allen Punken x vom gleichen Typ, so heißt sie vom **gemischten Typ**.

Die Wellengleichung ist hyperbolisch,
die Wärmeleitungsgleichung ist parabolisch,
die Potentialgleichung ist elliptisch.

Allgemeiner als die linearen pDgl sind die **quasilinearen pDgln**. Sie sind linear in den Ableitungen höchster Ordnung, wobei die Koeffizienten abhängen dürfen von

- $x = (x_1, \ldots, x_n)$
- u
- den Ableitungen von u, die nicht höchste Ordnung haben.

Allgemeine Gestalt einer **quasilinearen pDgl zweiter Ordnung**:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= b(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$$

Die Gleichung ist **homogen**, wenn b die Nullfunktion ist.

Die Matrix

$$A(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) := a_{ij}(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$$

ist symmetrisch
wieder o.E.

11.2.10 Lineare pDgln 1. Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten

Allgemeine Gestalt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x_1,\ldots,x_n)\cdot u = d(x_1,\ldots,x_n)$$

Dabei haben die Funktionen $a_1,\ldots,a_n,c,d : G \to \mathbb{R}$ ein gemeinsames Definitionsgebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$.

Für $n = 2$:

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y).$$

Dabei haben die Funktionen $a,b,c,d : G \to \mathbb{R}$ ein gemeinsames Definitionsgebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$.

Ist d die Nullfunktion, so ist die pDgl **homogen**.

Wir wissen schon:

Ist u_p eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen pDgl, so erhält man jede Lösung u der inhomogenen pDgl in der Gestalt

$$u = u_p + u_h,$$

wobei u_h eine Lösung der zugehörigen homogenen pDgl ist.

Mit Lösungen $u_1,\ldots u_k$ der homogenen pDgl ist auch jede Linearkombination $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i$ eine Lösung der homogenen pDgl ($\alpha_i \in \mathbb{R}$).

Wir behandeln weiter die pDgl

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y) \qquad \text{(L1)}$$

Versuch: Wir wollen eine Ableitung wegtransformieren und dann die pDgl durch Integration lösen.

Ansatz:

$$\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y)$$

$$u(x,y) =: U(\xi,\eta)$$

Nach der Kettenregel wird (L1) zu

$$a(x,y)(U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x) + b(x,y)(U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y) +$$

$$+ c(x,y)U = d(x,y)$$

und zu

$$(a(x,y)\xi_x + b(x,y)\xi_y) \cdot U_\xi + (a(x,y)\eta_x + b(x,y)\eta_y) \cdot U_\eta +$$

$$+ c(x,y)U = d(x,y)$$

Es gelingt, den Faktor (z.B.) vor U_ξ zum Verschwinden zu bringen, wenn es gelingt, die zu (L1) gehörige **Rumpf-Differentialgleichung**

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0 \qquad \text{(R)}$$

zu lösen.
Sie entsteht aus (L1), wenn man dort für c und für d die Nullfunktion einsetzt.

Eine Schar von Lösungen von (R) ist gegeben durch

$$u(x, y) = const.$$

Geometrische Interpretation: Horizontale Ebenen.

Diese Lösung von (R) führt nicht weiter, weil wir Lösungen

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

brauchen, die zu einer Variablentransformation führen,

zumindest eine Lösung (z.B.) $\xi(x, y)$, die wir als neue Variable einführen können.

Eine nicht konstante Lösung $u = u(x, y)$ schneidet jede Horizontalebene im allgemeinen in einer Kurve,
einer **Höhenlinie**.

Ist deren Grundriss eine Kurve
mit einer Parameterdarstellung

$$x = x(t), y = y(t)$$

oder mit der Gleichung

$$y = y(x),$$

so gilt:

$$u(x(t), y(t)) = u(x, y(x)) = const,$$

also

$$u_x\dot{x} + u_y\dot{y} = 0 = b(x, y)\dot{x} - a(x, y)\dot{y}$$

oder

$$u_x + u_y y' = 0 = b(x, y) - a(x, y)y',$$

also

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}$$

oder

$$y' = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}.$$

Die Lösungsflächen der Rumpf-Dgl

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0 \qquad \text{(R)}$$

haben Höhenlinien, deren Grundrisse die gewöhnliche Dgl

$$y' = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

erfüllen oder der Gleichung

$$b(x,y)\dot{x} - a(x,y)\dot{y} = 0$$

genügen.

Umgekehrt gilt: Ist $u = u(x,y)$ eine Funktion, so dass die Grundrisse der Höhenlinien des Graphen von u die Dgl

$$y' = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

erfüllen oder der Gleichung

$$b(x,y)\dot{x} - a(x,y)\dot{y} = 0$$

genügen, so ist u eine Lösung von (R).

Höhenlinien, die einer dieser beiden Gleichungen genügen, heißen **Charakteristiken** von (R).

Ermittlung einer Lösungsfläche bei bekannten Charakteristiken

Kennt man die Charakteristiken von (R), so erhält man im allgemeinen eine Lösungsfläche von (R), indem man so vorgeht:

1. Man gibt eine Raumkurve c vor.

2. Man betrachtet für jeden Punkt von c die Charakteristik, die diesen Punkt enthält.

3. Man setzt die erhaltenen Charakteristiken zu einer Fläche zusammen.

Gibt man eine andere Raumkurve c vor, so erhält man im allgemeinen eine andere Lösungsfläche von (R).

Bsp.:

$$x \cdot u_x + y \cdot u_y = 0$$

Hier ist $a(x, y) = x, b(x, y) = y$.
Die Dgl für die Grundrisse der Höhenlinien ist also

$$y' = \frac{y}{x}$$

Die Grundrisse der Höhenlinien sind also Geraden durch den Ursprung. Die Charakteristiken sind also horizontale Geraden, die die u-Achse schneiden (Lote zur u-Achse).

Wir wählen als Kurve c z.B. die Gerade mit der Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten als eine Parameterdarstellung der Lösungsfläche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$$

und als Lösungsfunktion

$$u = s = \frac{s(1+t)}{1+t} = \frac{y}{x}$$

Mit der Kurve c

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ s \end{pmatrix} \qquad (-\frac{\pi}{2} < s < \frac{\pi}{2})$$

erhalten wir als eine Parameterdarstellung der Lösungsfläche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ s \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix}$$

und als Lösungsfunktion

$$u = s = \arctan \frac{y}{x}$$

Mit der Kurve c

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

haben wir Pech, denn c ist selbst eine Charakteristik.