11.2.5 Das Superpositionsprinzip für lineare pDgln

Eine pDgl

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \ldots,$$

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_n^{k_n} \ldots \partial x_2^{k_2} \partial x_1^{k_1}}) = 0 \qquad \text{(pD)}$$

für eine Funktion u heißt **linear**, wenn F linear ist in u und in den auftretenden Ableitungen von u.

Ist (pD) linear, so lässt sich (pD) schreiben in der Gestalt

$$G(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \ldots,$$

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_n^{k_n} \ldots \partial x_2^{k_2} \partial x_1^{k_1}}) = f(x_1, \ldots, x_n), \qquad (*)$$

wobei G linear ist in u und in den auftretenden Ableitungen von u. Funktionen von x_1, x_2, ..., x_n treten auf in den Koeffizienten und auf der rechten Seite.

Ist $f = o$, so heißt (*) **homogen**, sonst **inhomogen**.

Ist (*) inhomogen, so heißt die pDgl

$$G(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \ldots,$$

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_n^{k_n} \ldots \partial x_2^{k_2} \partial x_1^{k_1}}) = 0 \qquad \text{(H)}$$

die zu (*) gehörige homogene lineare pDgl.

Kurzschreibweise: $G(\ldots) =: g(x, u)$. Weil die Ableitungen linear in u sind und G linear in u und den Ableitungen von u ist, gilt dann:

$$g(x, u_1 + u_2) = g(x, u_1) + g(x, u_2)$$

$$g(x, \lambda \cdot u) = \lambda \cdot g(x, u)$$

Daraus folgt:

Satz: (Superpositionsprinzip für lineare pDgln) Sind u_1, u_2 Lösungen (mit gemeinsamem Definitionsbereich) einer homogenen linearen pDgl (H), so sind auch $c_1 u_1 + c_2 u_2$ Lösungen von (H), wobei c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind.

pDgln für zeitabhängige reelle Funktionen einer reellen (Orts-)Veränderlichen

11.2.6 pDgl einer schwingenden Saite

Eine Saite sei längs der x-Achse in der (x, u)-Ebene gespannt zwischen den Punkten $(0, 0)$ und $(L, 0)$ (mit $L > 0$).

Die Saite werde ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0$ beschrieben durch eine Funktion $u(x, 0) = f(x)$.

Welche Auslenkung $u(x, t)$ erhält man zur Zeit t für den Punkt mit der Ruhelage $(x, u) = (x, 0)$?

Vereinfachende Annahmen:

1. Die Saite ist homogen (z.B. in Bezug auf die Masse).

2. Die Saite ist vollkommen elastisch.

3. Der Widerstand gegen die Biegung wird vernachlässigt.

4. Die Spannung der Saite ist so stark, dass die Schwerkraft vernachlässigt werden kann.

5. Jeder Punkt der Saite bewegt sich nur in u-Richtung.

6. Die Auslenkung in u-Richtung ist so gering, dass die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}$ auf $[0, L]$ überall einen kleinen Absolutwert hat.

Die Spannung T ist in jedem Punkt tangential zur Saite.
Auf ein kurzes Stück zwischen $P := (x_1, u(x_1))$ und $Q := (x_2, u(x_2))$ der Saite wirkt eine Kraft T_1 im Punkt P und T_2 im Punkt Q.
Sie hat jeweils einen Horizontalanteil

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta =: T \qquad \text{(wegen 5.)}$$

mit $\tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x_1}$ und $\tan\beta = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x_2}$.

Die Vertikalanteile $T_1 \sin\alpha$ und $T_2 \sin\beta$ geben zusammen die rücktreibende Kraft in u-Richtung, und da Kraft $=$ Masse mal Beschleunigung, ist

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(Das Stück PQ sei so kurz, dass kein Extremum dazwischen liegt.
Daher die verschiedenen Vorzeichen links.)

Division durch $T = T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta$ liefert:

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

oder

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Nun ist $\tan\beta = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x_2}$ und $\tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x_1}$ und

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}[\frac{\partial u}{\partial x}|_{x_2} - \frac{\partial u}{\partial x}|_{x_1}] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Damit erhalten wir die **eindimensionale Wellengleichung**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

mit $c^2 := \frac{\rho}{T}$. (ρ und T sind positiv.)
Sie ist linear, homogen und von zweiter Ordnung.

11.2.7 Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

Sei $u(x,t)$ die Temperatur, die ein dünner zylindrischer homogener Stab an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ zum Zeitpunkt t besitzt.

Die Wärme fließt von wärmeren Stellen des Stabes zu kälteren Stellen.

Eine nichttriviale Überlegung, die einige physikalische Vorkenntnisse erfordert, zeigt, dass dafür gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Konstante.

Die **eindimensionale Wärmeleitungsgleichung** ist linear, homogen und von zweiter Ordnung.

Zur Lösung verwendet man Fourier-Reihen.

In vielen Anwendungen kommt vor

1.2.8 Die Laplace-Gleichung oder Potentialgleichung

$$\Delta u = 0$$

ausführlich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Die inhomogene Form

$$\Delta u = f(x, y)$$

heißt **Poisson-Gleichung**. Die Lösungen ($\in C^2$) der Laplace-Gleichung heißen **harmonische Funktionen**.

Für harmonische Funktionen u gilt z.B. die **Mittelwerteigenschaft**:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos t, y_0 + r \sin t)\ dt$$

für jedes $r \geq 0$, für das der Kreis um (x_0, y_0) ganz im Definitionsbereich von u liegt.

Das zeigt man zum Beispiel unter Verwendung von Methoden aus der Theorie komplexer Funktionen einer komplexen Veränderlichen.