Der Eindeutigkeitssatz für Lösungen expliziter gewöhnlicher Dgln 1. Ordnung

Satz: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}$ stetig.
Geg.: AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \qquad (*)$$

Die Funktion f genüge auf G einer L-Bedingung. Dann gilt: Sind y_1 und y_2 Lösungen von (*), die auf einem Intervall I definiert sind, so gilt:

$$y_1(x) = y_2(x) \ \ \forall x \in I$$

Der **Beweis** benötigt längere Rechnungen.

Aus dem Eindeutigkeitssatz für Lösungen expliziter gewöhnlicher Dgln 1. Ordnung folgt zusammen mit dem Existenzsatz von Peano, aber nicht unmittelbar:

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen expliziter gewöhnlicher Dgln 1. Ordnung

Satz: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion f genüge auf G einer lokalen L-Bedingung. Dann gibt es für jedes $(x_0, y_0) \in G$ zu dem AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \qquad (*)$$

eine eindeutige Lösungskurve $y = y(x)$, die sich nach beiden Seiten bis zum Rand von G forsetzen lässt.

Bew.: ohne

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Vertikalstreifen

Im Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen expliziter gewöhnlicher Dgln 1. Ordnung kann die Lösung am "oberen Rand" von G enden.

Die Existenz und Eindeutigkeit auf einem vorgegebenen Intervall für x erhält man, wenn G ein "Vertikalstreifen" ist und f eine (globale) Lipschitz-Bedingung erfüllt.

Satz: Sei $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Vertikalstreifen,

$$S = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y \in \mathbb{R}\},$$

$f : S \to \mathbb{R}$ stetig.
Die Funktion f genüge auf S einer L-Bedingung.
Dann gibt es für jedes $(x_0, y_0) \in S$ zu dem AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \qquad (*)$$

eine eindeutige Lösungskurve $y = y(x)$, die für $a \leq x \leq b$ definiert ist.

Bew.: ohne

11.2 Partielle Differentialgleichungen

Eine **partielle Differentialgleichung** (**pDgl**) ist eine Gleichung, in der vorkommen können:

- n unabhängige Veränderliche x_1, x_2, ..., x_n

- bekannte Funktionen von x_1, x_2, ..., x_n

- eine unbekannte (gesuchte) Funktion u von den x_1, x_2, ..., x_n

- partielle Ableitungen
  $u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n},$
  $u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, u_{x_1x_3}, \ldots, u_{x_1x_n},$
  $u_{x_2x_1}, u_{x_2x_2}, u_{x_2x_3}, \ldots, u_{x_2x_n},$
  $u_{x_3x_1}, u_{x_3x_2}, u_{x_3x_3}, \ldots, u_{x_{n-1}x_n}, u_{x_nx_n}, \ldots$
  $$\frac{\partial^m u}{\partial x_n^{k_n} \ldots \partial x_2^{k_2} \partial x_1^{k_1}}$$
  von u
  Dabei ist $m = \sum_{j=1}^{n} k_j$ und heißt die **Ordnung** der pDgl.

11.2.1 Allgemeine Gestalt einer pDgl

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \dots,$$

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_n^{k_n} \dots \partial x_2^{k_2} \partial x_1^{k_1}}) = 0 \qquad \text{(pD)}$$

Eine Funktion u, definiert auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$, nennen **wir** eine **Lösung** von (pD), wenn gilt:

- u besitzt auf G alle partiellen Ableitungen bis zur m-ten Ordnung und diese sind stetig.

- setzt man u und die Ableitungen von u in (pD) ein, so ist die Gleichung $\forall\ (x_1, \dots, x_n)\ \in\ G$ erfüllt.

Bem.: Manchmal setzen wir für die Lösung weniger voraus.

11.2.2 Geometrische Interpretation einer pDgl für $n = 2$:

Ist $n = 2$, also $G \subseteq \mathbb{R}^2$, so ist der Graph von u eine Fläche in $\mathbb{R}^3$, eine **Lösungsfläche** oder **Integralfläche** von u.

Die part. Ableitungen von u lassen geometrische Deutungen zu:
(Wir schreiben $x_1 =: x$, $x_2 =: y$, $x_3 =: u$.)

$u_x(x_0, y_0)$ ist Steigung des Schnitts von Graph(u) mit einer Ebene parallel zur xu-Ebene durch den Punkt $(x_0, y_0, 0)$
$u_y(x_0, y_0)$ ist Steigung des Schnitts von Graph(u) mit einer Ebene parallel zur yu-Ebene durch den Punkt $(x_0, y_0, 0)$

11.2.3 Einfache Beispiele

Partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}) = 0$$

Bsp.:

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) = \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$$

Dann ist u konstant in x_1 —
in jedem x_1-Intervall, das für konstante $x_2, \ldots, x_n$ zum betrachteten Bereich gehört.

Für $n = 2$:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (*).$$

In jedem Rechteck

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, p \leq y \leq q\}$$

mit $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, $a < b$, $p < q$ ist u eine beliebige C^1-Funktion von y alleine —
wenn das Rechteck ganz zum Definitionsbereich von u gehört.

In jeder konvexen Teilmenge der xy-Ebene ist u eine beliebige C^1-Funktion von y alleine — wenn die konvexe Teilmenge ganz zum Definitionsbereich von u gehört.

Der Graph von u besteht aus Strecken, Halbgeraden oder Geraden parallel zur x-Achse.

$$u(x, y) = d(y)$$

ist die allgemeine Lösung von (*) auf jedem Gebiet der xy-Ebene, das aus allen Geraden parallel zur x-Achse eine Strecke, eine Halbgerade oder eine Gerade ausschneidet.

Bsp.:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - c = 0 \qquad (*)$$

für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}_+)$ und mit $c \in \mathbb{R}$. Dann ist die allgemeine Lösung

$$u(x, y) = cx + \left\{ \begin{array}{c} d_1(y) \\ d_2(y) \\ d_3(y) \end{array} \right\} \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{c} y < 0 \\ y \geq 0, x < 0 \\ y \geq 0, x > 0 \end{array} \right\},$$

wobei d_1 und d_2 längs $y = 0, x < 0$ und
d_1 und d_3 längs $y = 0, x > 0$ einen differenzierbaren Übergang haben müssen.

Bem.: Der Def.-Bereich D von F beeinflusst die Gestalt der Lösung.

Das haben wir jetzt verstanden und betrachten im folgenden in der nächsten Zeit nur Bereiche der xy-Ebene, die keine Probleme machen,

z.B. konvexe Bereiche oder Rechtecke mit achsenparallelen Seiten.

Bsp.:

$$u_x = f(x, y)$$

Allgemeine Lösung:

$$u(x, y) = \int f(x, y)dx + c(y)$$

Dabei ist $c(y)$ eine beliebige C^1-Funktion und $\int f(x, y)dx$ eine beliebige Funktion von (x, y), deren Ableitung nach x gleich $f(x, y)$ ist.

Man kann für eine spezielle Lösung zum Beispiel vorschreiben:

Den Wert von $u(x, y)$ für $x = x_0$:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} f(\xi, y)d\xi + c(y)$$

Damit ist $u(x_0, y) = c(y)$.

Man kann auch vorschreiben:

Den Wert von $u(x,y)$ längs einer Kurve $x = x(y)$:

$$u(x,y) = \int_{x(y)}^{x} f(\xi,y)d\xi + c(y)$$

Damit ist $u(x(y),y) = c(y)$.

Bsp.:

$$u_{xx} = 0$$

$\Rightarrow u_x = c(y) \Rightarrow u(x,y) = xc(y) + d(y)$

Bsp.:

$$u_{xy} = 0$$

$\Rightarrow u_x = c(x) \Rightarrow u(x,y) = \int c(x)dx + g(y)$ oder kürzer:

$$u(x,y) = f(x) + g(y)$$

11.2.4 Ein erstes Lösungsverfahren: lineare Variablensubstitution

Die lineare pDgl 1. O. mit konst. Koeffizienten

$$au_x + bu_y = f(x,y)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0$ transformiert man mit der **Variablensubstitution**

$$x = \frac{1}{2b}(\xi + \eta), \quad y = \frac{1}{2a}(\xi - \eta)$$

$$\xi = bx + ay, \qquad \eta = bx - ay$$

$$U(\xi,\eta) := u(\frac{1}{2b}(\xi+\eta), \frac{1}{2a}(\xi-\eta)) = u(x,y)$$

Rechte Seite:

$$F(\xi,\eta) = f(x,y) = f(\frac{1}{2b}(\xi+\eta), \frac{1}{2a}(\xi-\eta))$$

Damit ist

$$F(\xi,\eta) = au_x + bu_y =$$

$$= a(U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x) + b(U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y) =$$

$$= a(U_\xi b + U_\eta b) + b(U_\xi a + U_\eta(-a)) = 2abU_\xi$$

Damit ist

$$U_\xi = \frac{1}{2ab} F(\xi, \eta)$$

Das ist eine pDgl für U mit der Lösung:

$$U(\xi, \eta) = \frac{1}{2ab} \int F(\xi, \eta)\ d\xi + G(\eta).$$

Rücksubstitution:

$$u(x, y) = \frac{1}{2ab} \int_{bx_0+ay_0}^{bx+ay} F(\xi, bx - ay)\ d\xi +$$

$$+G(bx - ay).$$

Spezialfall: $f(x, y) = 0\ \forall (x, y) \Rightarrow$
$F(\xi, \eta) = 0 \forall (\xi, \eta) \Rightarrow u(x, y) = G(bx - ay)$, wobei G eine beliebige reelle diffbare Fkt einer reellen Variablen ist.

Bem.: Variablensubstitutionen brauchen nicht linear zu sein; sie können vielfältige Gestalt haben.