Regeln für das Faltungsprodukt:

(1) $f * g = g * f$,
(2) $f * (g * h) = (f * g) * h$,
(3) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$,
(4) $0 * f = 0$.

Wie sieht man das ein?

An einem Beispiel:

zu (1) $(f * g)(t) = \int_0^t g(t-u) \cdot f(u)\ du =$

$$= \int_t^0 g(v) \cdot f(t-v)\ d(-v) =$$

$$= \int_0^t f(t-v) \cdot g(v)\ dv = (g * f)(t)$$

11.1.10 Potenzreihenansatz zur Lösung gewöhnlicher Dgln

Geg.: Dgl der Gestalt

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (*)$$

Ges.: Lösung um x_0 herum

Vorgehen:

1. Ansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

2. Ableitungen bilden:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2}$$

usw. bis $y^{(n)}$.

3. Potenzreihen für y, y', ..., $y^{(n)}$ in (*) einsetzen

4. In (*) sortieren nach aufsteigenden Potenzen von $(x - x_0)$.
(Die Klammern $(x - x_0)$ nicht weiter ausmultiplizieren!)

5. Vor jedem der Ausdrücke $(x - x_0)^n$ muss jetzt die Konstante Null stehen. Das gibt ein Gleichungssystem für a_0, a_1, ...

6. Der Reihe nach ausrechnen: a_0, a_1, ... bis zur gewünschten Genauigkeit.

7. Potenzreihe mit berechneten a_n hinschreiben:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n (x - x_0)^n$$

mit $k = \infty$ oder $k \in \mathbb{N}$.

8. Wenn möglich Konvergenzradius bestimmen!

Beispiel:

Geg.: Differentialgleichung

$$y'' = y'^2 + x^2$$

Ges.: Anfang einer Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 für y, so dass y die Dgl erfüllt.

Lösung:

Ansatz für y:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots$$

usw. (Aber mehr brauchen wir nicht.)

$$y'^2 = a_1^2 + 4a_1 a_2 x + (6a_1 a_3 + 4a_2^2)x^2 +$$

$$(8a_1 a_4 + 12a_2 a_3)x^3 + (10a_1 a_5 + 16a_2 a_4 + 9a_3^2)x^4 + \dots$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$0 = y'' - y'^2 - x^2 =$$

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \ldots$$
$$-(a_1^2 + 4a_1a_2x + (6a_1a_3 + 4a_2^2)x^2 +$$
$$+(8a_1a_4 + 12a_2a_3)x^3 + \ldots) - x^2$$

Daraus folgt:

$2a_2 = a_1^2,$

$6a_3 = 4a_1a_2,$

$12a_4 = 1 + 6a_1a_3 + 4a_2^2,$

$20a_5 = 8a_1a_4 + 12a_2a_3,$

...

Wählt man $a_1 =: c$, so bekommt man

$a_2 = \frac{1}{2}c^2,$

$a_3 = \frac{2}{3}\frac{1}{2}c^3 = \frac{1}{3}c^3,$

$a_4 = \frac{1}{12} \cdot (1 + 2c^4 + c^4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4}c^4,$

$a_5 = \frac{1}{20} \cdot (8 \cdot \frac{1}{12}c + 2c^5 + 2c^5) = \frac{1}{30}c + \frac{1}{5}c^5$

So kann man weitermachen.

In der Rechnung kommt a_0 nicht vor. Es kann offenbar beliebig gewählt werden.

(Das liegt daran, dass in der Dgl y nicht vorkommt, sondern nur Ableitungen von y.)

Ergebnis:

$$y = a_0 + cx + \frac{1}{2}c^2x^2 + \frac{1}{3}c^3x^3 + (\frac{1}{12} + \frac{1}{4}c^4)x^4 +$$
$$+(\frac{1}{30}c + \frac{1}{5}c^5)x^5 + \dots$$

Wie bei einer Dgl 2. O. zu erwarten, hat man eine zweiparametrige Lösungsschar.

Man kann (i.a.) noch zwei Wünsche an die Lösung äußern.

Dieses Beispiel war einfach zu rechnen, aber nicht betrachtet wurden z.B.:
die Genauigkeit der Lösung;
der Konvergenzradius der Lösung.

11.1.11 Allgemeine Sätze über gewöhnliche Dgln

Existenzsatz von Peano:

Geg.: AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \qquad (*)$$

Vor.: In einem Rechteck R um (x_0, y_0) ist f stetig: $R = \{(x, y) : x_0 - a \leq x \leq x_0 + a,$
$y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$ mit $0 < a \in \mathbb{R}$, $0 < b \in \mathbb{R}$.

Beh.: (*) besitzt mindestens eine Lösungskurve, die sich bis zum Rand von R fortsetzen lässt.

Bew.: ohne

Bem.: Die Lösung muss nicht eindeutig sein!

Bsp.: $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2 \Rightarrow$

$$y = x^3 \text{ löst das AWP } y' = 3 \cdot y^{\frac{2}{3}}, y(0) = 0$$

Aber das tut auch die Funktion $f(x) = 0 \forall x$

Eindeutigkeit der Lösung expliziter gewöhnlicher Dgln 1. Ordnung

Im Existenzsatz von Peano ist die rechte Seite $f(x, y)$ "nur stetig".
Bei stärkeren Voraussetzungen an f wird die Lösung eindeutig bestimmt.
Wann ist eine Lösung sicher eindeutig?

Dafür wichtig ist eine **Lipschitz-Bedingung**:

Def.: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}$.
Dann sagt man: f erfüllt auf G eine Lipschitz-Bedingung (kurz: eine **L-Bedingung**) bezüglich y, wenn gilt:
Es gibt eine Konstante $L \geq 0$, so dass gilt:

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in G :$$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

Die Konstante L heißt eine **Lipschitz-Konstante**, kurz: eine **L-Konstante**.

Bem.: Das bedeutet ungefähr: Die Schnitte des Graphen von f mit Parallelebenen zur yz-Ebene haben überall eine beschränkte Steigung.

Def.: (**lokale Lipschitz-Bedingung**)
Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}$.
Dann sagt man: f erfüllt auf G eine lokale Lipschitz-Bedingung (kurz: eine **lokale L-Bedingung**) bezüglich y, wenn gilt:
Zu jedem $(x_0, y_0) \in G$ gibt es eine Umgebung U von (x_0, y_0), so dass gilt:
Es gibt eine Konstante $L \geq 0$, so dass gilt:

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in U :$$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

Die Konstante L heißt eine **lokale Lipschitz-Konstante**, kurz: eine **lokale L-Konstante**.

Bem.: Bei einer lokalen Lipschitz-Bedingung wird die lokale L-Konstante i.a. von der Umgebung U abhängen.

Eine Lipschitz-Bedingung gilt für stetig partiell ableitbare Funktionen

Satz: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}$.
Ist f stetig partiell nach y ableitbar, dann gilt eine Lipschitzbedingung auf jedem Rechteck

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\},$$

das ganz in G liegt. Dabei ist $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Eine Lipschitz-Konstante ist

$$L := Max\{|f_y(x, y)| : (x, y) \in R\}$$

Frage: Warum braucht man ein Rechteck R?
Warum muss das Rechteck R ganz in G liegen?
Warum, muss das Rechteck abgeschlossen sein?

Der **Beweis** verwendet u.a. den MWS für Funktionen einer Veränderlichen.