Um ein Übertragungsprinzip anwenden zu können, braucht man
eine umfangreiche Tabelle von
Laplace-Transformierten und
Rechenregeln für die Laplace-Transformation:

Für Laplace-transformierbare Funktionen f und g gilt:

Linearität: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$$

Warum? Weil

$$\int_0^\infty e^{-st}(af(t) + bg(t))dt =$$

$$= a\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt$$

Streckung der unabhängigen Variablen: Ist $F = \mathcal{L}[f]$, $c > 0$, $h(t) := f(c \cdot t)$ und $H := \mathcal{L}[h]$, dann ist

$$H(s) = \frac{1}{c} \cdot F(\frac{s}{c})$$

Warum? Weil mit $u := ct, dt = \frac{1}{c} du$ gilt:

$$H(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(ct) dt =$$

$$= \frac{1}{c} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{c} u} f(u) du = \frac{1}{c} F(\frac{s}{c})$$

Bem.: Mit $c < 0$ bleibt man nicht im Intervall $[0, \infty[$.

Laplace-Transformation der Ableitung:
Sind f und f' Laplace-transformierbar, so gilt:

$$\mathcal{L}[f'](s) = s \cdot \mathcal{L}[f] - f(0+)$$

Dabei ist $f(0+) := \lim_{t \to 0, t > 0} f(t)$.

Warum?

$$\mathcal{L}[f'](s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt =$$

$$= [e^{-st} f(t)]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \cdot (-s) =$$

$$= -f(o+) + s \cdot \mathcal{L}[f]$$

Mehrfache Anwendung dieser Regel ergibt:

Sind f, f' und f'' Laplace-transformierbar, so gilt:

$$\mathcal{L}[f''](s) = s \cdot \mathcal{L}[f'] - f'(0+) =$$

$$s^2 \cdot \mathcal{L}[f] - sf(0+) - f'(0+)$$

Allgemeiner:

Sind f, f', ..., $f^{(n)}$ Laplace-tranformierbar, so gilt:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0+)$$

$$-s^{n-2} \cdot f'(0+) - \ldots - s \cdot f^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)$$

Bem.: Laplace-Transformierte von Ableitungen führen auf Multiplikation mit s (und Addition von Konstanten). Daher kann man die linken Seiten bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten Laplace-transformieren.

Laplace-Transformation des Integrals:

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)\ d\tau] = \frac{1}{s} F(s)$$

Warum?

Setze in

$$\mathcal{L}[g'](s) = s \cdot \mathcal{L}[g] - g(0+)$$

ein: $g' = f$.

Die Integralfunktion wurde dabei nicht durch einen eigenen Buchstaben bezeichnet. Diese Schreibweise wird auch im folgenden verwendet.

Beispiele:

$$\mathcal{L}[t] = \mathcal{L}[\int_0^t 1\ d\tau] = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s^2}$$

für $s > 0$

$$\mathcal{L}[t^n] = \mathcal{L}[\int_0^t n \cdot \tau^{n-1}\ d\tau] =$$

$$= n \cdot \mathcal{L}[\int_0^t \tau^{n-1}\ d\tau] = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}] =$$

$$= \ldots = \frac{n!}{s^n} \mathcal{L}[1] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

für $s > 0$

Daraus folgt unmittelbar:

$$\mathcal{L}[a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n] =$$

$$= \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{2!a_2}{s^3} + \ldots + \frac{n!a_n}{s^{n+1}}$$

Was ist $\mathcal{L}[\sin^2 t]$?
$\frac{d}{dt}\sin^2 t = 2\sin t\cos t = \sin 2t = \sin\omega t$ für $\omega = 2 \Rightarrow$

$$\mathcal{L}[\sin^2 t] = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}[\sin 2t] =$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{s^2 + 2^2} = \frac{2}{s \cdot (s^2 + 4)}$$

Differentiation der Bildfunktion:

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s) = -\mathcal{L}[t \cdot f(t)]$$

Bew.: ohne (Dazu fehlen uns Vorkenntnisse.)

Aber aus der nicht bewiesenen Formel folgt sofort:

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[t^2 \cdot f(t)]$$

und allgemeiner:

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f](s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n \cdot f(t)]$$

Nicht ganz so unmittelbar folgt:

Integration der Bildfunktion:

$$\int_s^\infty \mathcal{L}[f](u)\ du = \mathcal{L}[\frac{1}{t}f(t)],$$

denn:

$$\frac{d}{ds}\int_s^\infty \mathcal{L}[f](u)\ du = -\mathcal{L}[f](s)$$

und

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\frac{1}{t}f(t)] = -\mathcal{L}[t\cdot\frac{1}{t}\cdot f(t)] = -\mathcal{L}[f(t)] = -\mathcal{L}[f](s)$$

Damit ist

$$\mathcal{L}[\frac{1}{t}f(t)] = \int_s^{s_0} \mathcal{L}[f](u)\ du + c$$

Der Grenzwert für $s \to \infty$ ist auf der linken Seite $= 0$,

auf der rechten Seite $= \int_\infty^{s_0} \mathcal{L}[f](u)\ du + c$,

also ist

$$c = \int_{s_0}^\infty \mathcal{L}[f](u)\ du$$

und damit folgt die Behauptung.

Laplace-Transformation einer gedämpften Funktion:

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \int_0^\infty e^{-st}e^{-at}f(t)\ dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s+a)t}f(t)\ dt = \mathcal{L}[f](s+a)$$

Das entspricht einer Verschiebung des Graphen von $\mathcal{L}[f]$ um a nach links.

Dämpfung einer Laplace-Transformierten:

$$e^{-as}\mathcal{L}[f](s) = e^{-as}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\ dt =$$

$$\int_0^\infty e^{-s(a+t)}f(t)\ dt = \int_a^\infty e^{-su}f(u-a)\ du =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\tilde{f}(t-a)\ dt = \mathcal{L}[\tilde{f}](s),$$

wobei f durch $\tilde{f}$ auf $[0,\infty[$ fortgesetzt wird durch die Vereinbarung:

$$\tilde{f}(x) := \left\{ \begin{array}{l} f(x) \\ 0 \end{array} \right\} \text{ falls } \left\{ \begin{array}{l} a \leq x \\ 0 \leq x < a \end{array} \right\}$$

Produkte von Laplace-Transformierten:

$$\mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-su} f(u)\, du \cdot G(s) = \int_0^\infty e^{-su} \cdot G(s) \cdot f(u)\, du =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} \cdot g(v) \cdot f(u)\, dv\, du =$$

$$= \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-st} \cdot g(t-u) \cdot f(u)\, dt\, du =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \cdot \int_0^t g(t-u) \cdot f(u)\, du\, dt$$

Wir bezeichnen

$$\int_0^t g(t-u) \cdot f(u)\, du =: (f * g)(t)$$

als **Faltungsprodukt** der beiden Funktionen f und g und erhalten damit:

$$\mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s) = \mathcal{L}[f * g](s)$$