11.1.9 Laplace-Transformation

Übertragungsprinzipien

Ein schwieriges Problem P lässt sich manchmal **übersetzen** in ein anderes Problem P^*.

Kann man
- P^* lösen mit der Lösung L^* und
- L^* rückübersetzen in die Lösung L von P,

so spricht man von einem **Übertragungsprinzip**.

Bsp.:

P: Schnittpunkt S zweier in einer Figur gegebener Geraden g_1, g_2 ermitteln

Übersetzung: affines Koordinatensystem wählen, Gleichungen (G_1), (G_2) für g_1, g_2 aufstellen

P^*: Lösung S^* des LGS (G_1), (G_2) ermitteln.

Rückübersetzung: Punkt S mit Koordinaten S^* in die Figur einzeichnen.

Bsp.: (nicht besonders aktuell)

P: Produkt p zweier großer (positiver) Zahlen z_1, z_2 berechnen

Übersetzung: Logarithmen $\log z_1$, $\log z_2$ von z_1, z_2 ermitteln (z.B. aus Logarithmentafel)

P^*: Summe p^* von $\log z_1$, $\log z_2$ berechnen

Rückübersetzung: $a^{p^*} =: p$ ermitteln (z.B. aus Logarithmentafel), wenn log der Logarithmus zur Basis a war.

Bsp.: Lineares AWP mit konstanten Koeffizienten lösen

P: $L(x)(t) = f(t)$ mit:

$L(x) := a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x,$

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ konstante Koeffizienten,

$x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$

Übersetzung: Laplace-Transformation $\mathcal{L}$ anwenden, z.B. mit Hilfe einer Tabelle:

P^*: $\mathcal{L}\{L(x)\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$

Das ist eine Gleichung für $X = \mathcal{L}\{x\}$

Diese Gleichung nach $X = \mathcal{L}\{x\}$ auflösen.

Rückübersetzung: $x(t)$ so bestimmen, z.B. mit Hilfe einer Tabelle, dass

$\mathcal{L}\{x\}(s) = X(s)$

$x(t)$ ist Lösung von P.

Die Laplace-Transformation

(Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827))

Begriffe:

Eine Fkt $f : [0, \infty[$ heißt **Laplace-transformierbar** (**L-transformierbar**) :$\Leftrightarrow$ Die Funktion F mit

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt =: \mathcal{L}[f](s) =: F(s) \in \mathbb{R}$$

ist definiert für ein $s \in \mathbb{R}$.

F ... die (reelle) **Laplace-Transformierte** (**L-Transformierte**) von f

Die unabhängigen Variablen von f und F werden verschieden bezeichnet.

Schreibweise:

$F(s)$ **Bildfunktion** von $f(t)$

$f(t)$ **Urbildfunktion** von $F(s)$

Bem.: Nicht dem t entspricht ein s sondern dem f entspricht ein F.

Beispiele für Laplace-Transformierte:

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f](s)$
1	$\frac{1}{s}$ für $s > 0$
e^{kt}	$\frac{1}{s-k}$ für $s > k \in \mathbb{R}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}, s > 0$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}, s > 0$

Herleitungen zu der Tabelle:

$$f(t) = 1 \Rightarrow F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-st} dt =$$

$$= \lim_{b \to \infty} [\frac{1}{-s} e^{-st}]_{t=0}^{t=b} =$$

$$= \lim_{b \to \infty} (\frac{1}{-s})(e^{-sb} - 1) = \frac{1}{s}$$

Für die letzten Gleichheitszeichen braucht man $s > 0$. Offenbar ist $F(0) = \infty \notin \mathbb{R}$.

$$f(t) = e^{kt} \Rightarrow F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{kt} dt =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{(k-s)t} dt =$$

$$= \lim_{b \to \infty} [\frac{1}{k-s} e^{(k-s)t}]_{t=0}^{t=b} =$$

$$= (\frac{1}{k-s}) \lim_{b \to \infty} (e^{(k-s)b} - 1) = \frac{1}{s-k}$$

Für die letzten Gleichheitszeichen braucht man $s > k$. Offenbar ist $F(k) = \infty \notin \mathbb{R}$.

$$f(t) = \cos \omega t \Rightarrow F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cos \omega t dt =$$

$$= \Re \int_0^\infty e^{-st} (\cos \omega t + i \sin \omega t) dt =$$

$$= \Re \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{i\omega t} dt =$$

$$= \Re \int_0^\infty e^{(-s+i\omega)t} dt =$$

$$= \Re \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{(-s+i\omega)t} dt =$$

$$= \Re \lim_{b \to \infty} [\frac{1}{-s+i\omega} e^{(-s+i\omega)t}]_{t=0}^{t=b} =$$

$$= \Re \frac{1}{-s+i\omega} \lim_{b \to \infty} (e^{-sb} \cdot e^{i\omega b} - 1) =$$

$$= -\Re \frac{1}{-s+i\omega}$$

Die letzte Gleichung gilt, weil $|e^{i\omega b}| = 1$ und $\lim_{b \to \infty} e^{-sb} = 0$ für $s > 0$.

$$\Re \frac{1}{s - i\omega} = \Re \frac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$f(t) = \sin\omega t \Rightarrow F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t dt =$$

$$= \Im \int_0^\infty e^{-st}(\cos\omega t + i\sin\omega t)dt =$$

$$= \Im \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{i\omega t} dt =$$

$$= \Im \int_0^\infty e^{(-s+i\omega)t} dt =$$

$$= \Im \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{(-s+i\omega)t} dt =$$

$$= \Im \lim_{b\to\infty} [\frac{1}{-s+i\omega} e^{(-s+i\omega)t}]_{t=0}^{t=b} =$$

$$= \Im \frac{1}{-s+i\omega} \lim_{b\to\infty} (e^{-sb} \cdot e^{i\omega b} - 1) =$$

$$= -\Im \frac{1}{-s+i\omega}$$

Die letzte Gleichung gilt, weil $|e^{i\omega b}| = 1$ und $\lim_{b\to\infty} e^{-sb} = 0$ für $s > 0$.

$$\Im \frac{1}{s-i\omega} = \Im \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Laplace-Transformation
Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ auf jedem beschränkten Intervall $\subseteq [0, \infty[$ stückweise stetig
(höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen!),
so dass $|f(t)|$ höchstens exponentiell wächst
(so dass gilt:

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{\sigma t}$$

für alle $t > 0$, wenn man M und σ geeignet wählt.

Dann gilt:

a) $F(s) := \mathcal{L}[f](s)$ existiert zumindest für alle $s > \sigma$.

b) $f(t)$ ist durch F eindeutig bestimmt - außer an Unstetigkeitsstellen von f.

c) $\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$

Bew.: ohne
a), **c)** plausibel, **b)** vielleicht später

Die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für die Laplace-Transformation erfüllen zum Beispiel:

$f(t) = t^n$ mit $n \in \mathbb{N}$

$f(t) = \sinh t$

Nicht die Voraussetzungen erfüllen zum Beispiel:

$f(t) = \frac{1}{t}$

$f(t) = \tan t$

$f(t) = e^{\cosh t}$

Nicht als Laplace-Transformierte können zum Beispiel auftreten:

$F(s) = 1$, $F(s) = s$, $F(s) = \sin s$, $F(s) = \cos s$ usw., weil $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$