11.1.6 Lineare Dgln 2. O. mit konstanten Koeffizienten und Störglied 0

$y'' + ay' + by = f(x)$ (*) mit $a, b \in \mathbb{R}$ und

$f: I \to \mathbb{R}$ Störfkt

I Intervall in $\mathbb{R}$

$y'' + ay' + by = 0$ (H) zugehörige homogene lineare Dgl

Die Lösungen von (H) bilden einen zweidim. VR $\mathbb{L}$.

Je zwei l.u. Lösungen $y_1, y_2 \in \mathbb{L}$ bilden eine Basis von $\mathbb{L}$, auch Fundamentalsystem von Lösungen von (H) genannt.

Wir lassen komplexe Störglieder und komplexe Lösungen zu:

$f(x) = g(x) + i\,h(x)$, $y(x) = u(x) + i\,v(x)$

Dann ist (*) gleichwertig zu dem System:

$$\left.\begin{array}{ll} u'' + a u' + b u = g(x) & \text{Real} \\ v'' + a v' + b v = h(x) & \text{Imaginär} \end{array}\right\} \text{teil von l.S. u. r.S.}$$

Versuch: Wann ist $y = e^{\lambda x}$ eine Lösung von (H)?

$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

(H) $0 = \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x}$

$$= \underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{\text{charakteristisches Polynom von (H)}} \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}$$

$y = e^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ ist eine Lösung von (H)

$\iff$ λ ist Nullstelle des char. Polynoms von (H)

Versuch: Wann ist $y = x \cdot e^{\lambda x}$ eine Lösung von (H) ?

$$y' = e^{\lambda x} + x \cdot \lambda e^{\lambda x} = (1 + \lambda x) e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda \cdot e^{\lambda x} + (1 + \lambda x) \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} = \lambda (2 + \lambda x) e^{\lambda x}$$

$$\text{(H)} \quad 0 = \left(\lambda (2 + \lambda x) + a (1 + \lambda x) + b x \right) e^{\lambda x}$$

$$= \left(2\lambda + a + (\lambda^2 + a\lambda + b) x \right) e^{\lambda x} \quad \forall x \iff$$

$$\underbrace{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}_{\lambda = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}} \quad \text{und} \quad \underbrace{2\lambda + a = 0}_{\lambda = -\frac{a}{2}}$$

$y = x \cdot e^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ ist eine Lösung von (H)

$\Longleftrightarrow$ λ ist doppelte Nullstelle des char. Polynoms von (H)

Damit haben wir alles für die Lösung von (H):

$y'' + a y' + b y = 0$

Besitzt das char. Polynom $p(\lambda) := \lambda^2 + a\lambda + b$ die doppelte Nullstelle $\lambda = -\frac{a}{2}$ $(\Leftrightarrow a^2 = 4b)$, so bilden $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = x e^{\lambda x}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von (H).

Besitzt $p(\lambda)$ die verschiedenen Nullstellen

$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}$ ($\Leftrightarrow a^2 \neq 4b$), so bilden

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ ein (i.a. komplexes) Fundamentalsystem von Lösungen von (H).

Wann ist das Fundamentalsystem komplex, und wie findet man dann ein reelles Fundamentalsystem?

Ist $\frac{1}{4}(a^2-4b) = -\beta^2$ und $-\frac{a}{2} =: \alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$, so ist o.E. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ und

$$\hat{y}_1 = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x)$$

$$\hat{y}_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i \sin\beta x)$$

$$(\hat{y}_1 + \hat{y}_2) \cdot \frac{1}{2} = e^{\alpha x} \cos\beta x =: y_1$$

$$(\hat{y}_1 - \hat{y}_2) \cdot \frac{1}{2i} = e^{\alpha x} \sin\beta x =: y_2$$

bilden dann ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen von (H).