



Tutoraufgaben

31. Trigonometrisches Polynom

Ein trigonometrisches Polynom sei gegeben durch

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Dabei ist $N \in \mathbb{N}$ und $a_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wie kann man $f(t)$ mit Hilfe der Euler-Formel $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ aufschreiben als Linearkombination von Ausdrücken der Gestalt $e^{i\omega t}$?

32. Orthogonalitätsrelationen

Man zeige: Die Funktionen $f_j : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g_k : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, die definiert sind durch

$$f_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

$$f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos kx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$g_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

bilden ein Orthonormalsystem, wenn man als Skalarprodukt auf dem Raum der auf $[-\pi, \pi]$ stetigen Funktionen verwendet:

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) dx.$$

33. Fourier-Koeffizienten

Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten von $f(x) = x \cos x$, $x \in]-\pi, \pi[$.

Zentralübung

34. Fourier-Koeffizienten

Die 2π -periodische Funktion f ist auf dem Intervall $]-\pi, \pi[$ durch

$$f(x) = |x|(\pi - |x|)$$

gegeben. Skizzieren Sie f und berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten.