TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. J. Hartl
PD Dr. Ch. Karpfinger
Dr. M. Prähofer

Höhere Mathematik IV für Maschinenwesen

Sommersemester 2008
Blatt 10
(19.6.2008)

Tutoraufgaben

29. Klassifikation linearer pDgln zweiter Ordnung

Gegeben sei die lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$a(x,y)\cdot u_{xx} + 2b(x,y)\cdot u_{xy} + c(x,y)\cdot u_{yy} + d(x,y)\cdot u_x + e(x,y)\cdot u_y = f(x,y) \qquad (*)$$

Wie erkennt man anhand der Funktionen $a(x,y),\dots,f(x,y)$, ob die Differentialgleichung (*) in einem Punkt (x,y) elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist? Klassifizieren sie danach die folgenden pDgln:

(a) $u_{xx} + u_{yy} = 0$, (b) $u_{xx} = u_{yy}$, (c) $u_x = u_{yy}$, (d) $u_{yy} - y\,u_{xx} = 0$.

30. Lineare Transportgleichung erster Ordnung

$\rho(x,t)$ ist die Verkehrsdichte am Ort x zur Zeit t entlang einer Straße. Diesmal ist die Geschwindigkeit $v(x) > 0$ der Autos vom Ort abhängig. $\rho(x,t)$ genügt der partiellen Differentialgleichung

$$\rho_t + (v\rho)_x = 0. \qquad (*)$$

(a) Wie lautet die Rumpf-Differentialgleichung, wie die gDGl $(**)$ für die Grundrisse der Charakteristiken?

(b) Sei $\xi(x,t)$ eine implizite Lösung von $(**)$ mit $\xi(x,0) = x$. Zeigen Sie, das ξ eine Lösung der Rumpf-Dgl ist.

(c) Wie lautet die Lösung der Rumpf-Dgl mit der Anfangsbedingung $\rho(x,0) = \rho_0(x)$?

(d) Sei nun $v(x) = e^x$. Zeigen Sie, dass $\xi(x,t) = -\ln(e^{-x} + t)$ eine implizite Lösung von $(**)$ mit $\xi(x,0) = x$ ist.

(e) Bestimmen Sie die Umkehrung $x(\xi,\tau)$, $t(\xi,\tau)$ der Koordinatentransformation $\xi = \xi(x,t)$ und $\tau = \tau(x,t) = t$.

(f) Transformieren Sie $(*)$ auf die neuen Koordinaten (ξ,τ) und lösen Sie die so erhaltene Gleichung.

(g) Finden Sie durch Rücktransformation Lösungen von $(*)$ mit der Anfangsbedingung $\rho(x,0) = \rho_0(x)$.

Zentralübung

Die Zentralübung entfällt am 26.6.2008 wegen der IKOM.