TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. J. Hartl
Dr. M. Prähofer

Höhere Mathematik IV für Maschinenwesen

Sommersemester 2008
Blatt 9
(12.6.2008)

Tutoraufgaben

26. Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten

Die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ harmonische Funktion $u(x, y)$ wird durch Einführung von Polarkoordinaten zu einer Funktion $U(r, \varphi)$.

(a) Wie erhält man U bei bekanntem u und umgekehrt.

(b) Wie lautet die Jacobi-Matrix der Transformation auf Polarkoordinaten $(r, \varphi) \mapsto (x(r, \varphi), y(r, \varphi))$ und ihrer Umkehrung?

(c) Berechnen Sie die Form der Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten, d.h. die Differentialgleichung für $U(r, \varphi)$, die der Laplace-Gleichung für $u(x, y)$ entspricht.

(d) Finden Sie alle Lösungen, die nicht von φ abhängen.

27. Wärmeleitungsgleichung

Finden Sie Lösungen der Wärmeleitungsgleichung $u_t = k^2 u_{xx}$ mit Hilfe des Produktansatzes $u(x, t) = f(t)g(x)$ durch Separieren der Variablen x und t.

Zentralübung

28. Eindimensionale Wellengleichung

Die in der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ (*)$$

gesuchte Funktion $u(x, t)$ wird durch Einführung der Variablen $v := x + ct, \quad z := x - ct$ zu einer Funktion U von v und z.

(a) Man gebe die partielle Differentialgleichung $(**)$ für U an, in die $(*)$ durch die Einführung von v und z transformiert wird.

(b) Man ermittle die allgemeine Lösung $U(v, z)$ von $(**)$ und damit die allgemeine Lösung $u(x, t)$ von $(*)$.

(c) Nun sei mit einer reellen Funktion f als Anfangsbedingung vorgegeben:

$$u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = 0.$$

Wie hängt dann die Lösung von (*) von f ab?

(d) Mit einer reellen Funktion g werde die Anfangsbedingung aus (c) modifiziert zu

$$u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = g(x).$$

Wie hängt dann die Lösung von $(*)$ von f und g ab?