Prof. Dr. J. Hartl
Dr. M. Prähofer

Höhere Mathematik IV für Maschinenwesen

Sommersemester 2008
Blatt 3
(30.4.2008)

Tutoraufgaben

9. Gedämpfte harmonische Schwingung, Resonanz

Die Differentialgleichung $\ddot{x} = -\mu\dot{x} - \omega_0^2 x + \cos\omega t$ beschreibt eine periodisch getriebene Schwingung im harmonischen Potential $\frac{\omega_0^2}{2}x^2$ mit der Dämpfung $\mu > 0$.

(a) Wie lauten die Lösungen der homogenen DGl für schwache, kritische und starke (überkritische) Dämpfung?

(b) Wie lauten die periodischen Lösungen der inhomogenen DGl für schwache Dämpfung? (Ansatz $c\,e^{\pm i\omega t}$ für die Inhomogenität $e^{\pm i\omega t}$.)

(c) Für welche ω ist die Amplitude von x maximal?

10. Entkopplung eines Systems von Differentialgleichungen

Ein Teilchen bewegt sich reibungsfrei im Potential $V(x,y) = x^2 - \sqrt{3}\,xy + 2y^2$ in der xy-Ebene, gemäß $\frac{d^2}{dt^2}\binom{x}{y} = -\operatorname{grad} V(x,y)$.

(a) Wie lauten die Bewegungsgleichungen für $x(t)$ und $y(t)$ explizit?

(b) Entkoppeln Sie die beiden DGln, indem Sie auf die Hauptachsen transformieren.

(c) Wie lautet die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen?

(d) Wie kann man die Schwingungsfrequenzen direkt bestimmen?

(e) Was passiert qualitativ, wenn zur Bewegungsgleichung ein isotroper Dämpfungsterm $-\mu\binom{\dot{x}}{\dot{y}}$ hinzugefügt wird?

Zentralübung

11. Die harmonische Halfpipe

Ein Teilchen bewegt sich reibungsfrei in der xy-Ebene entlang der Zykloide $Z = \gamma([-\pi,\pi])$, $\gamma(\alpha) = r\binom{\alpha+\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$, $r > 0$, mit in die negative y-Richtung wirkender Erdbeschleunigung g.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Teilchenposition parametrisiert durch die Bogenlänge s auf und lösen Sie sie.

(b) Wie groß ist die Schwingungsfrequenz $\frac{\omega_0}{2\pi}$ für $r = 1[\mathrm{m}]$ und $g = 9.81[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}] \approx \pi^2$.

(c) Wie groß muss die viskose Reibung μ in $[\frac{1}{s}]$ entlang der Bahn sein um den aperiodischen Grenzfall zu erhalten? Welcher stationären Fallgeschwindigkeit entspricht diese Reibung?

(d) Die reibungsfreie Schwingung wird nun periodisch angeregt, mit der Inhomogenität $a\cos\omega t$, $a,\omega > 0$. Finden Sie periodische Lösungen. Was passiert im Fall $\omega = \omega_0$?