



Tutoraufgaben

6. Lineare Unabhängigkeit von Funktionen

- Wie erkennt man, dass die Funktionen $1, x, x^2$ in $C^1(\mathbb{R})$ linear unabhängig sind?
- Wie erkennt man, dass die Funktionen $1, e^x, e^{2x}$ in $C^1(\mathbb{R})$ linear unabhängig sind?
- Warum sind $1, x, x^2, \dots, x^n$, $n \in \mathbb{N}$, linear unabhängig in $C^1(\mathbb{R})$?
- Seien $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genügend oft differenzierbar. Zeigen Sie: Die n Funktionen sind linear unabhängig, wenn für ein $x \in \mathbb{R}$ die $n \times n$ -Matrix $(f_k^{(j-1)}(x))_{1 \leq j, k \leq n}$ eine von Null verschiedene Determinante hat. Anwendung: z.B. $e^x, xe^x, x^2e^x, x^3e^x$ bei $x = 0$.

7. Exponentialansatz

Gegeben ist die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten $\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = 0$ mit $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.

- Zeigen Sie, dass $y(x) = e^{\lambda x}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k$ ist.
- Zeigen Sie: Ist λ eine doppelte Nullstelle von p , so ist auch $xe^{\lambda x}$ eine Lösung.
- Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'' + 5y' + 6y = 0$.
- Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y''' + 5y'' + 3y' - 9y = 0$.

8. Tiefpass

Ein Tiefpass besteht aus einer Reihenschaltung eines Widerstandes R und einer Spule mit Induktivität L . Bei der angelegten zeitabhängigen Spannung $U(t)$ gilt für den Strom durch den Widerstand $I(t)$

$$RI(t) + L\dot{I}(t) = U(t).$$

- Zeigen Sie, dass die am Widerstand abfallende Spannung $V(t)$ gegeben ist durch

$$V(t) = e^{-\frac{R}{L}t}V(0) + \int_0^t e^{-\frac{R}{L}(t-s)} \frac{R}{L} U(s) ds.$$

- Berechnen und interpretieren Sie $V(t)$ für $U(t) = U_0$ und $V(0) = 0$.
- Berechnen und interpretieren Sie $V(t)$ für $U(t) = U_0 \cos \omega t$, $\omega \in \mathbb{R}$, und $V(0) = 0$. Wie ist das Verhalten von $V(t)$ für große t ?

Am Donnerstag, den 1. Mai 2008 entfällt die Zentralübung wegen des Feiertags.