TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. J. Hartl
Dr. M. Prähofer

Höhere Mathematik IV für Maschinenwesen

Sommersemester 2008
Blatt 1
(17.4.2008)

Tutoraufgaben

1. Lokale Eigenschaften

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Wir untersuchen lokale Eigenschaften von Lösungen des Anfangswertproblems (AWP)

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

mit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Sei $y :]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\to \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ eine Lösung des AWP.

(a) Wie lauten die Koeffizienten des Taylor-Polynoms zweiten Grades von y im Entwicklungspunkt x_0?

(b) Wie lautet die Gleichung der Tangente an y im Punkt x_0?

(c) Welche Eigenschaften muss f besitzen, um höhere Ordnungen der Taylor-Entwicklung von y berechnen zu können.

2. Erreichen des Nullpunktes

Gegeben ist das Anfangswertproblem (AWP) $\dot{x} = -x^\alpha$, $x(0) = 1$, wobei $\alpha > 0$ ist. Entscheiden Sie ob, wann und wie die Lösung des AWP, $x(t)$, für $t \geq 0$ den Wert 0 erreicht. Skizzieren Sie die Lösung für $\alpha = 2, 1, \frac{1}{2}$.

3. Separierbare Differentialgleichungen

Geben Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an:

(a) $y'x = 2y$

(b) $y' = \frac{2x}{x^2+1} y$

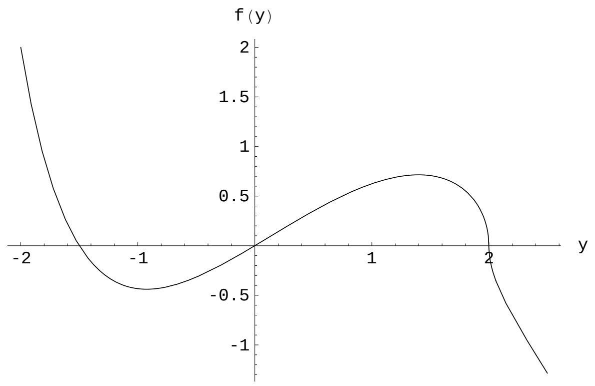
(c) $y'(y+1)^2 + x^3 = 0$

Zentralübung

4. Graphische Lösung einer einfachen Differentialgleichung

(a) Erklären Sie in Worten, wie man Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(y)$ mit stetigem f graphisch bestimmen kann.

(b) Skizzieren Sie Lösungen für die Funktion $f(y)$ mit dem Graphen



5. Reibungsfreies Teilchen im Potential

Ein elektrisch geladenes Teilchen bewegt sich im Potential $V(x)$ gemäß der Bewegungsgleichung $\ddot{x} = -V'(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ als zeitabhängige Funktion entlang von Lösungen der Bewegungsgleichung eine Konstante ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Lösung von $\dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$ für $E \in \mathbb{R}$ auch eine Lösung der Bewegungsgleichung ist.

(c) Sei $E \in \mathbb{R}$ fest, $V(a) = V(b) = E$, $a < b$ und $V(x) < E$ für $x \in]a, b[$. Wie lautet der Ausdruck für die Zeit T, die dass Teilchen von a nach b benötigt, wenn es mit Geschwindigkeit 0 startet?

(d) Berechnen Sie T aus (c) für den harmonischen Oszillator $V(x) = \frac{1}{2}x^2$, $E > 0$.