Laplace-Transformation – Definition und Rechenregeln

Zentrum Mathematik, TU München PD Dr.-Ing. R. Callies HM3/WS 2006/07

Definition:

Eine Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ heißt *Laplace-transformierbar*, wenn das Integral

$$F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

konvergiert für $\forall\, s \in H_\gamma := \{s \in \mathbb{C} \mid Re(s) > \gamma\}$.

Heaviside-Funktion:

$$u(t) := \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ 1 & , \ t \geq 0 \end{cases}$$

Rechenregeln:

Seien f, g L-transformierbar mit $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}$ und $G(s) := \mathcal{L}\{g(t)\}$ sowie s aus dem gemeinsamen Definitionsbereich von $F(s)$ und $G(s)$.

(1) Linearität (Additionssatz):

$$\mathcal{L}\{\lambda f(t) + g(t)\} = \lambda F(s) + G(s)\,, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

(2) Ähnlichkeitssatz (Skalierung):

$$\mathcal{L}\{f(\lambda t)\} = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0$$

(3) Dämpfungssatz:

$$\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t} f(t)\right\} = F(s + \alpha)\,, \quad \alpha > 0$$

(4) Verschiebungssatz:

$$\mathcal{L}\{f(t - \alpha) u(t - \alpha)\} = e^{-\alpha s} F(s)\,, \quad \alpha \geq 0$$

(5) Faltungssatz:

$$\mathcal{L}\{(f \star g)(t)\} = F(s) G(s)\,, \quad (f \star g)(t) := \int_0^t f(t - \tau) g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

(6) Transformation von Ableitung und Integral:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= sF(s) - f(0+)\,, \quad 0+ := \lim_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} \varepsilon \\ \mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - \ldots - s f^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+) \\ \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} &= \frac{1}{s} F(s) \end{aligned}$$

(7) Multiplikations- und Divisionssatz:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t f(t)\} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F(s) \\ \mathcal{L}\{t^n f(t)\} &= (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F(s) \\ \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\} &= \int_s^\infty F(u)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

(8) Periodizität:

$$f(t + p) = f(t) \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Laplace-Korrespondenzen

$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{t\sin at}{2a}$
e^{-as}	$\delta(t-a)$	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{\sin at + at\cos at}{2a}$
$\dfrac{1}{s}$	1	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\ ,\ a^2 \neq b^2$	$\dfrac{b\sin at - a\sin bt}{ab(b^2-a^2)}$
$\dfrac{1}{s^2}$	t	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\ ,\ a^2 \neq b^2$	$\dfrac{\cos at - \cos bt}{b^2-a^2}$
$\dfrac{1}{s^n}\ ,\quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\dfrac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$\dfrac{1}{b}e^{-at}\sin bt$
$\dfrac{1}{s^a}\ ,\quad a > 0$	$\dfrac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$
$\dfrac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\dfrac{1}{s^4-a^4}$	$\dfrac{\sinh at - \sin at}{2a^3}$
$\dfrac{1}{(s+a)^n}\ ,\quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$	$\dfrac{s}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{\sin at\ \sinh at}{2a^2}$
$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}\ ,\ a \neq b$	$\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\dfrac{1}{s^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\sin at$	$\arctan\dfrac{a}{s}$	$\dfrac{\sin at}{t}$
$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$	$\dfrac{1-e^{-ks}}{s}$	$u(t)-u(t-k)$
$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{1}{a}\sinh at$	$\dfrac{1}{s^a}e^{-ks}\ ,\quad a > 0$	$\dfrac{(t-k)^{a-1}}{\Gamma(a)}u(t-k)$
$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$	$\dfrac{1}{s(1-e^{-ks})}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} u(t-nk)$
$\dfrac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\dfrac{1-\cos at}{a^2}$	$\dfrac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$	$\dfrac{1}{2}(\sin t + \lvert\sin t\rvert)$
$\dfrac{1}{s^2(s^2+a^2)}$	$\dfrac{at-\sin at}{a^3}$	$\dfrac{a\coth(\pi s/2a)}{s^2+a^2}$	$\lvert\sin at\rvert$
$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{\sin at - at\cos at}{2a^3}$	$\dfrac{1}{s}\tanh as$