Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

a) **Homogen**

Gestalt: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$

Lösungsverfahren: Man bestimme alle n Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des *charakteristischen Polynoms* $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$.

(i) Ist λ eine j-fache reelle Nullstelle, so sind $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{j-1}e^{\lambda x}$ genau j linear unabhängige Lösungen zu der Nullstelle λ .

(ii) Sind $\lambda = \alpha \pm i\beta$ je j-fache komplexe Nullstellen, so sind

$$\begin{array}{ccccccc} e^{\alpha x}\cos\beta x &,& xe^{\alpha x}\cos\beta x &,& \ldots &,& x^{j-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \;, \\ e^{\alpha x}\sin\beta x &,& xe^{\alpha x}\sin\beta x &,& \ldots &,& x^{j-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{array}$$

$2j$ linear unabhängige Lösungen zu diesen 2 Nullstellen.

Fundamentalsystem: Insgesamt braucht man n linear unabhängige Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ der DGL. Berechnet man die Lösungen wie oben beschrieben, dann sind die automatisch linear unabhängig. Hat man irgendwelche n Lösungen , so testet man die mit der **Wronski** -Determinante auf lineare Unabhängigkeit. Es muss gelten:

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{für alle} \quad x\,.$$

Lösung: $y(x) = C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ mit $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$.

Reduktionsansatz: Kennt man eine Lösung $y_1(x)$ der homogenen DGL, so lässt sich das Problem mittels des Ansatzes $y_2(x) = c(x)y_1(x)$ auf die Ordnung $n-1$ reduzieren: Da $y_1(x)$ die DGL erfüllt, heben sich alle Summanden mit dem Faktor $c(x)$ weg und man erhält eine homogene DGL der Ordnung $n-1$ für $d(x) = c'(x)$.

b) **Inhomogen**

Gestalt: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = b(x)$

Lösung: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, wobei $y_h(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen DGL (s. oben) ist und $y_p(x)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL. In vielen Fällen lässt sich y_p mit einem geeigneten Ansatz bestimmen. Siehe Tabelle auf der Rückseite!

Variation der Konstanten: Ansatz $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)$ mit dem Fundamentalsystem $y_1, \ldots, y_n$ der homogenen DGL. Die Funktionen $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ und damit auch $y_p(x)$ ergeben sich durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

und anschließende Integration. Dies LGS ist wegen

$$\det(\text{Koeffizientenmatrix}) = W(x) \neq 0$$

immer eindeutig lösbar ; für $n = 2$ ergibt sich

$$C_1 = \int \frac{-y_2b}{W}dx\,,\; C_2 = \int \frac{y_1b}{W}dx.$$

Superpositionsprinzip: Ist y_1 eine partikuläre Lösung zum Störglied b_1 und y_2 eine partikuläre Lösung zu b_2 , so ist $y_1 + y_2$ eine partikuläre Lösung zu $b_1 + b_2$.

Ansatz vom Typ der rechten Seite

Gesucht wird eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ der *linearen DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = b(x)$$

mit $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Wesentlich für die Lösung dieser DGL ist ihr *charakteristisches Polynom*

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\,.$$

Die Variation der Konstanten führt zwar immer zum Ziel, kann aber im Einzelfall, besonders für DGLn höherer Ordnung, sehr aufwändig werden. Für gewisse Typen von Störfunktionen sind daher spezielle Ansätze für y_p effizienter (Ansatz vom Typ der rechten Seite). Dabei geht man davon aus, dass eine partikuläre Lösung ungefähr die gleiche Bauart besitzt wie die Störfunktion $b(x)$ (=Inhomogenität, rechte Seite, Anregung).
In der Tabelle sind nur einige mögliche Ansätze ohne Anspruch auf Vollständigkeit aufgeführt. Für Störglieder mit $\sinh(\beta x)$ oder $\cosh(\beta x)$ kann man das entsprechend machen.
Ist der Ansatz schon als Teil der homogenen Lösung vorhanden (*Resonanzfall*), muss solange mit x multipliziert werden, bis dieser keine Teilmenge der homogenen Lösung mehr enthält.
In der Tabelle seien $b_0, \ldots, b_m, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ durch das Störglied gegeben und die Zahlen $A_0, \ldots, A_m$ und $B_0, \ldots, B_m \in \mathbb{R}$ zu bestimmen.

Störfunktion $b(x)$	**Ansatz**
$b(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$	$y_p(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m$ falls 0 keine Nullstelle von $p(\lambda)$ $y_p(x) = x^k(A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m)$ falls 0 eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$
$b(x) = e^{\alpha x}(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$	$y_p(x) = e^{\alpha x}(A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m)$ falls α keine Nullstelle von $p(\lambda)$ $y_p(x) = x^k e^{\alpha x}(A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m)$ falls α eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$
$b(x) = \cos(\beta x)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$ oder $b(x) = \sin(\beta x)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$	$y_p(x) = \cos(\beta x)(A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m)$ $+\sin(\beta x)(B_0 + B_1x + \ldots + B_mx^m)$ falls $i\beta$ keine Nullstelle von $p(\lambda)$ $y_p(x) = x^k\cos(\beta x)(A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m)$ $+x^k\sin(\beta x)(B_0 + B_1x + \ldots + B_mx^m)$ falls $i\beta$ eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$
$b(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$ oder $b(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$	$y_p(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)(A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m)$ $+e^{\alpha x}\sin(\beta x)(B_0 + B_1x + \ldots + B_mx^m)$ falls $\alpha + i\beta$ keine Nullstelle von $p(\lambda)$ $y_p(x) = x^k e^{\alpha x}\cos(\beta x)(A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m)$ $+x^k e^{\alpha x}\sin(\beta x)(B_0 + B_1x + \ldots + B_mx^m)$ falls $\alpha + i\beta$ eine k-fache Nullstelle von $p(\lambda)$