Technische Universität München
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Brigitte Forster-Heinlein

Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I
Vo(4),Ue(2)

§1 Vektoren

Vektoren des $I\!R^n$ (Addition, skalare Multiplikation, Norm)
Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$
  Cosinussatz: $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\,\vec{a} \cdot \vec{b}$
  Projektion
  Arbeitsbegriff: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$
Vektorprodukt: $\vec{a} \times \vec{b}$
  Lorentzkraft: $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$
Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen im $I\!R^3$
Hesse-Normalform (HNF): $\vec{n} \cdot \vec{x} = d$
  Abstand Punkt-Ebene
Abstand von 2 windschiefen Geraden

§2 Lineare Gleichungssysteme

Beispiele
Gauß-Verfahren
Lösbarkeit

§3 Matrizen und Determinanten

Affine Abbildungen
Matrizenrechnung
Determinanten
Inverse von Matrizen

§4 Grenzwerte, unendliche Folgen und Reihen

Binomische Formel: Binomialkoeffizient, Fakultät, Pascal-Dreieck
Folgen reeler Zahlen
Grenzwertbegriff, Konvergenz
Rechenregeln für Grenzwerte (Grenzwertsätze)
Expontialfunktion anhand stetiger Verzinsung: $\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
  radioaktiver Zerfall
Unendliche Reihen
  geometrische Reihe

§5 Funktionen

Polynome, rationale Funktionen
  Euklids Algorithmus
  Partialbruchzerlegung
Kreisfunktionen
  Additionstheoreme
  Sinus-, Cosinussatz
  Bogen- und Gradmass
Grenzwerte von Funktionen

§6 Differentiation (Ableiten von Fuktionen)

Motivation aus der Physik: Weg-Zeit-Gesetz $x = x(t)$
  mittlere Geschwindigkeit $v_m = \frac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1-t_0}$
  momentane Geschwindigkeit $v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} v_m$
Geometrische Interpretation: Steigung einer Kurve
Definition der Ableitung
Ableitung elementarer Funktionen: $x \mapsto x^n$, sin, cos
Ableitungsregeln: Summen-, Produkt-, Quotientenregel
Kettenregel, Ableitungen von $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$
Mittelwertsatz der Differentialrechnung
Regel von l'Hôspital

§7 Taylorformel

Motivation: Berechnung von Funktionswerten
  Früher: Tycho de Brahes Sinus-Berechnungen mittels Additionstheoremen
    in Rechenstuben mit $10 - 20$ „Rechenknechten“ auf 20-30 Stellen genau
  Heute: Taylor-Formeln und ähnliches
Satz von Taylor
  Taylorpolynom, Restglied
  Taylorreihen für sin, cos, exp
Anwendung der Taylorformel auf Optimierung (lokale Extrema)

§8 Umkehrfunktionen

Logarithmus als Umkehrfunktion zur Exponetialfunktion:
Allgemeine Potenzfunktion $x \mapsto a^x$ $(a > 0)$ und deren Umkehrfunktion $\log_a$
Umkehrfunktionen zu sin, cos, tan
Allgemeine binomische Formel: $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad (\alpha \in \mathbb{R}, |x| < 1)$

§9 Integration (Aufleiten von Funktionen)

Geometrische Interpretation: Flächenberechnung
Berechnung von $\int_0^b x^2\,dx$ durch Limes der Ober- und Untersummen
Integraldefinition, Stammfunktion
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Integrationsregeln
  partielle Integration
  Substitutionregel
Rotationskörper: Volumen, Oberfläche

§10 Funktionen in zwei unabhängigen Veränderlichen

Beispiele: Zuckerhut von Rio $z = f(x, y) = h - a^2(x^2 + y^2)$
Zustandsgleichung eines idealen Gases $p = \frac{nRT}{V} = f(T, V)$
Partielle Ableitungen, Vertauschbarkeit von Ableitungen
Taylorformel
Richtungsableitungen
Richtung grösster Steigung, Gradient
Lokale Extrema, Hesse-Matrix
Fehlerrechnung bei physikalischen Versuchen
totales Differential
Kettenregel, Implizit definierte Funktionen

§11 gewöhnliche DGLn

DGL 1. Ordnung: Trennung der Variablen
Lineare Systeme, Variation der Konstanten
Ausblick auf partielle Differentialgleichungen

Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften II
Vo(3),Ue(2)

§12 Gewöhnliche Differentialgleichungen, die (eindimensionale) Wellengleichung

Newtonaxiome zum Aufstellen von Differentialgleichungen
klassische Kräfte: Schwerkraft, Hooke-Gesetz, Reibung
Ableitung der eindimensionalen Wellengleichung (Federpendel)
Gewöhnliche Differentialgleichung 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten
  Ansatz zur homogenen Gleichung
  Ansätze zur inhomogenen Gleichung
Anfangswertprobleme und deren physikalische Deutung

§13 Eigenwertprobleme

Schwingendes 3−atomiges Molekül
Bewegungsgleichungen
Lösungsansatz
Eigenwertproblem
Physikalische Deutung der Eigenwerte und Eigenvektoren

§14 Mehrfachintegrale

Motivation: Volumen krummflächig berandeter Bereiche
Definition: Integral über Rechteckbereiche
Satz von Fubini, Rückführung auf Einfachintegrale
Doppelintegrale bei Nicht-Rechteckbereichen
Substitutionsregel (Transformationsformel)
Polar-, Kugel-, Zylinderkoordinaten
Dreifachintegrale
Masse, Schwerpunkt, Trägheitsmoment eines Körpers
Speziell im Hinblick auf die TM werden behandelt:
1) Massenmittelpunkte, Geom. Mittelpunkte, Schwerpunkte 1-, 2-, 3-dim. Körper
(z.B. geom. M. eines Tetraeders) Masse einer Kurve, Fläche, Körper
2) Reduktion von Kraftsystemen 2- u. 3-dim.!
3) Trägheitsmomente, Flächenträgheitsmomente (Steiner Satz, kompl. Geometrien)

§15 Kurvenintegrale

Arbeitsbegriff
Arbeit als Kurvenintegral
Gravitationsgesetz, Coulomb-Gesetz, Magnetfelder
Parametrisierung von Kurven
Berechnung von Kurvenintegralen
Stammfunktionsproblem und Weg-Unabhängigkeit von Kurvenintegralen
Rotation eines Kraftfeldes, Integrabilitätsbedingungen
Ausblick auf die Sätze von Gauß und Stokes

Literatur zu MBNW

Formelsammlung

- Ihre Abitur-Formelsammlung
- L. Råde, B. Westergren, P. Vachenauer. *Springers mathematische Formeln.* Springer 2000.

Lehrbücher

- J. Hainzl. *Mathematik für Naturwissenschaftler.* Teubner 1974.
- G. Merziger, T. Wirth. *Repetitorium der höheren Mathematik.* Binomi 1999.
- K. Meyberg, P. Vachenauer. *Höhere Mathematik 1+2.* Springer 2001.
- O. Opitz. *Mathematik. Lehrbuch für Ökonomen.* Oldenbourg 2002.
- M. Precht, K. Voit, R. Kraft. *Mathematik für Nichtmathematiker 1+2.* Oldenbourg 1994.
- K. Sydsæter, O. Hammond. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler.* Pearson 2003.

Lehr- und Arbeitsbücher zu MBNW II

- L. Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler 1+2.* Vieweg & Sohn 2001.