

# Laplace-Transformation – Definition und Rechenregeln

Zentrum Mathematik, TU München

PD Dr.-Ing. R. Callies

HM4/SoS 2005

---

## Definition:

Eine Funktion  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Laplace-transformierbar*, wenn das Integral

$$F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

konvergiert für  $\forall s \in H_\gamma := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \gamma\}$ .

## Heaviside-Funktion:

$$u(t) := \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 & , t \geq 0 \end{cases}$$

## Rechenregeln:

Seien  $f, g$  L-transformierbar mit  $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}$  und  $G(s) := \mathcal{L}\{g(t)\}$  sowie  $s$  aus dem gemeinsamen Definitionsbereich von  $F(s)$  und  $G(s)$ .

(1) Linearität (Additionssatz):

$$\mathcal{L}\{\lambda f(t) + g(t)\} = \lambda F(s) + G(s), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

(2) Ähnlichkeitssatz (Skalierung):

$$\mathcal{L}\{f(\lambda t)\} = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0$$

(3) Dämpfungssatz:

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\} = F(s + \alpha), \quad \alpha > 0$$

(4) Verschiebungssatz:

$$\mathcal{L}\{f(t - \alpha)u(t - \alpha)\} = e^{-\alpha s} F(s), \quad \alpha \geq 0$$

(5) Faltungssatz:

$$\mathcal{L}\{(f \star g)(t)\} = F(s)G(s), \quad (f \star g)(t) := \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau$$

(6) Transformation von Ableitung und Integral:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= sF(s) - f(0+), \quad 0+ := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \varepsilon \\ \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n F(s) - s^{n-1}f(0+) - \dots - sf^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+) \\ \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} &= \frac{1}{s} F(s) \end{aligned}$$

(7) Multiplikations- und Divisionssatz:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{tf(t)\} &= -\frac{d}{ds} F(s) \\ \mathcal{L}\{t^n f(t)\} &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \\ \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\} &= \int_s^\infty F(u) du \end{aligned}$$

(8) Periodizität:

$$f(t + p) = f(t) \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt$$

## Laplace-Korrespondenzen

$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{t \sin at}{2a}$
$e^{-as}$	$\delta(t - a)$	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{\sin at + at \cos at}{2a}$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}, a^2 \neq b^2$	$\frac{b \sin at - a \sin bt}{ab(b^2 - a^2)}$
$\frac{1}{s^2}$	$t$	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}, a^2 \neq b^2$	$\frac{\cos at - \cos bt}{b^2 - a^2}$
$\frac{1}{s^n}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s+a)^2 + b^2}$	$\frac{1}{b} e^{-at} \sin bt$
$\frac{1}{s^a}, a > 0$	$\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \cos bt$
$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	$\frac{1}{s^4 - a^4}$	$\frac{\sinh at - \sin at}{2a^3}$
$\frac{1}{(s+a)^n}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!}$	$\frac{s}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{\sin at \sinh at}{2a^2}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}, a \neq b$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \sin at$	$\arctan \frac{a}{s}$	$\frac{\sin at}{t}$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$	$\frac{1 - e^{-ks}}{s}$	$u(t) - u(t - k)$
$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a} \sinh at$	$\frac{1}{s^a} e^{-ks}, a > 0$	$\frac{(t-k)^{a-1}}{\Gamma(a)} u(t-k)$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$	$\frac{1}{s(1 - e^{-ks})}$	$\sum_{n=0}^{\infty} u(t - nk)$
$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$	$\frac{1 - \cos at}{a^2}$	$\frac{1}{(s^2 + 1)(1 - e^{-\pi s})}$	$\frac{1}{2} (\sin t +  \sin t )$
$\frac{1}{s^2(s^2 + a^2)}$	$\frac{at - \sin at}{a^3}$	$\frac{a \coth(\pi s/2a)}{s^2 + a^2}$	$ \sin at $
$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{\sin at - at \cos at}{2a^3}$	$\frac{1}{s} \tanh as$	