Folie 22. Gebundene Vektoren

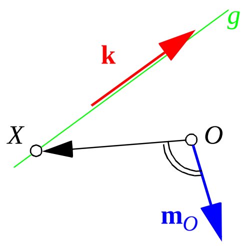
21.11.01 P.Vachenauer

Definitionen

(a) Gebundener Vektor im Raum (= Einzelkraft in der Mechanik) = $(\mathbf{k}, g)$
= Paar (Vektor, Gerade), sodass Translation $\mathbf{k}$ die Gerade g in sich verschiebt.

(b) Moment $\mathbf{m}_O$ von $(\mathbf{k}, g)$ bezüglich Punkt O, liest man aus der

Momentengleichung von g ab: $\mathbf{x} \times \mathbf{k} = \mathbf{m}_O$



(c) Wirkung eines gebundenen Vektors im Punkt O

$:= (\mathbf{k}, \mathbf{m}_O)$ = Paar von Vektoren mit der

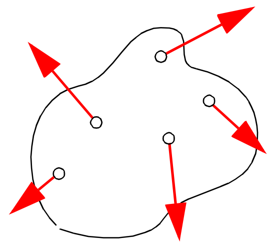
Zusatzbedingung $\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}_O = 0$ und $\mathbf{k} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{m}_O = \mathbf{0}$.

(d) Wirkung eines Systems von gebundenen Vektoren im Punkt O

$(\mathbf{k}_1, \mathbf{m}_{O1}), (\mathbf{k}_2, \mathbf{m}_{O2}), \ldots (\mathbf{k}_n, \mathbf{m}_{On})$ (Kraftsystem)

$:= (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \ldots + \mathbf{k}_n, \mathbf{m}_{O1} + \mathbf{m}_{O2} + \ldots + \mathbf{m}_{On})$

Paar von Vektoren *ohne Zusatzbedingung.*



(e) Zwei Systeme von gebundenen Vektoren sind äquivalent
genau dann, wenn sie gleiche Wirkung in O besitzen.

(f) Vektorwinder ist Paar von gebundenen Vektoren. Die Wirkung eines Vektorwinders im Punkt O ist ein Paar von Vektoren $(\mathbf{k}, \mathbf{m}_O)$ ohne Zusatzbedingung.

Spezielle Vektorwinder

	Name	Wirkung in O	Zusatzbedingung	Deutung in der Mechanik
(1)	Nullwinder	$(\mathbf{0}, \mathbf{0})$	keine	Ruhelage
(2)	Gebundener Vektor	$(\mathbf{k}, \mathbf{m}_O)$	$\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}_O = 0$	Einzelkraft
(3)	freies Moment	$(\mathbf{0}, \mathbf{m}_O)$	$\mathbf{m}_O \neq \mathbf{0}$	Wirkung von zwei entgegen-gesetzten, gleichgroßen Einzelkräften $\mathbf{k}$, $-\mathbf{k}$ aber mit verschiedenen Wirkungslinien
(4)	Vektorschraube in O	$(\mathbf{k}, \mathbf{m}_O)$	$\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{m}_O = p\mathbf{k}$	p *Steigungsparameter,* $p > 0$ *Rechtsschraube,* $p < 0$ *Linksschraube.*

Satz

a) Ein freies Moment hat in jedem Punkt dieselbe Wirkung.

b) Für jeden Vektorwinder gibt es einen Punkt P, sodass $(\mathbf{k}, \mathbf{m}_P)$ vom Typ (1), (2), (3) oder (4) ist.

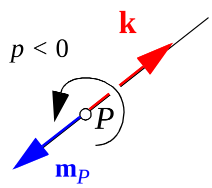
Beweis

a) $\mathbf{m}_O = \overrightarrow{OX_1} \times \mathbf{k} - \overrightarrow{OX_2} \times \mathbf{k} = \overrightarrow{X_2X_1} \times \mathbf{k}$ ist unabhängig von O.

b) Fall 1) $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, dann liegt unabhängig von O der Typ (1) oder (3) vor.

Fall 2) $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$, dann $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \mathbf{k} \times \mathbf{m}_O$ und $p = \frac{1}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{m}_O$.

Falls $p = 0$, so liegt der Typ (2) vor, mit Wirkungslinie durch P.



Zum Beweis

Der Fall (4) ergibt sich auch durch orthogonale Zerlegung von $\mathbf{m}_O$ in Richtung $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{m}_P = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}_O}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}\,\mathbf{k}\,.$$ $\mathbf{m}^\perp$ ist das Moment des gebundenen Vektors $(\mathbf{k}, g)$ in O.