Folie 34. Eigenwerte, Eigenvektoren

19.12.00 P.Vachenauer

Motivation. Für welche Vektoren $\mathbf{b}$ hat $A\mathbf{b}$ dieselbe Richtung wie $\mathbf{b}$?

Definitionen. $\lambda \in \mathbf{K}$ ist **Eigenwert (EW)** der Matrix $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$ $:\Leftrightarrow$
es gibt einen **Eigenvektor (EV)** $\mathbf{b} \in \mathbf{K}^n$ mit $A\mathbf{b} = \lambda\mathbf{b}$ und $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$

Charakteristische Gleichung von A ist $\det(A-\lambda E_n) = 0$

Satz. λ EW von A $\Leftrightarrow$ $\det(A-\lambda E_n) = 0$

Rechenregeln und Rechenschemata

(0) Rechenschema für die Handrechnung

Schritt 1. Charakteristische Gleichung aufstellen und alle ihre Nullstellen λ berechnen

Schritt 2. Zu jeder Nullstelle λ alle Lösungen des homogenen LGS $A\mathbf{b} = \lambda\mathbf{b}$ bestimmen

(1) Koeffizienten der charakteristischen Gleichung

$$\boxed{\det(A-\lambda E_n) = (-\lambda)^n + \text{Spur } A(-\lambda)^{n-1} + \ldots + \det A}$$

(2) Transformationsregeln

B invertierbare Matrix

$\alpha, \beta \in \mathbf{K}$

Matrix	A	αA	A^m	$A+\beta E_n$	A^T	A^{-1}	$B^{-1}AB$
EW	λ	$\alpha\lambda$	λ^m	$\lambda+\beta$	λ	λ^{-1}	λ
EV	$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}$	?	$\mathbf{b}$	$B^{-1}\mathbf{b}$

(3) Bedeutung für lineare Abbildungen

Die lineare Abbildung $f: \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ des $\mathbf{R}^n$ hat in Bezug auf die Basis $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ die Abbildungsmatrix $B^{-1}AB$. Das bedeutet mit (2):

a) Die EW der Abbildungsmatrix sind in jeder Basis dieselben (der Abbildung zu eigen)

b) Die Lage der EV im $\mathbf{R}^n$ ist in jeder Basis dieselbe (aber nicht ihre Koordinaten!)

c) Die charakteristische Gleichung der Abbildungsmatrix ist in jeder Basis dieselbe.
Das bedeutet mit (1): Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die EW von A, so gilt

$$\text{Spur } A = \text{Spur } (B^{-1}AB) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

$$\det A = \det (B^{-1}AB) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

Diese beiden Gleichungen gelten im Zerfällungskörper des charakteristischen Polynoms von A über $\mathbf{K}$

d) Diagonalisierung

Besitzt A n linear unabhängige EV $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, so hat die Abbildungsmatrix von f bezüglich der Basis $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ Diagonalgestalt:

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

(4) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind stets linear unabhängig

(5) Eigenwerte und Eigenvektoren spezieller Matrizen

k. Spalte von A	ist $\alpha \mathbf{e}_k$	$\Rightarrow$	$\mathbf{e}_k$ ist EV	zum EW α
$A^2 = A$	A idempotent	$\Rightarrow$	$\lambda^2 = \lambda$,	alle EW sind 0 oder 1
$A^2 = E_n$	A involutorisch	$\Rightarrow$	$\lambda^2 = 1$,	alle EW sind 1 oder -1
$\exists k \in \mathbf{N} : A^k = 0$	A nilpotent	$\Rightarrow$	$\lambda^k = 0$,	alle EW sind 0
$A^T = A, \mathbf{K} = \mathbf{R}$	A symmetrisch	$\Rightarrow$		1) alle EW sind reell 2) es gibt ein ONS von EV als Basis des $\mathbf{R}^n$

Anwendung

Skalarprodukt im $\mathbf{R}^n$: $\mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ mit positiv definiter und symmetrischer Matrix A.

Mit (5) gibt es als Basis B von $\mathbf{R}^n$ ein ONS, das aus EV von A gebildet wird.

Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die EW von A, so gilt mit $\mathbf{x} = B\tilde{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{y} = B\tilde{\mathbf{y}}$:

a)
$$\mathbf{x}^T A \mathbf{y} = (B\tilde{\mathbf{x}})^T A (B\tilde{\mathbf{y}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} = \lambda_1 \tilde{x}_1 \tilde{y}_1 + \ldots + \lambda_n \tilde{x}_n \tilde{y}_n$$

b) A positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind positiv.

c) Im Falle $n = 2$ stellt der 'Einheitskreis' $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 1$ eine Ellipse dar.